哲人石丛书 Philosopher's Stone Series
科学史与科学文化系列



黄钟大吕

中国古代和十六世纪声学成就

Chen Cheng-Yih

ACOUSTICS IN ANCIENT AND THE SIXTEENTH CENTURY CHINA

程贞一 著
王翼勋 译

上海科技教育出版社



世纪出版

哲人石丛书 Philosopher's Stone Series

科学史与科学文化系列

黄钟大吕

中国古代和十六世纪声学成就

精神病学史

从收容院到百忧解

寻求哲人石

炼金术文化史

科学的统治

开放社会的意识形态与未来

一种文化?

关于科学的对话

整体性与隐缠序

卷展中的宇宙与意识

早期希腊科学

从泰勒斯到亚里士多德

科学革命

批判性的综合

爱因斯坦恩怨史

德国科学的兴衰

上架建议:自然科学总论

ISBN 978-7-5428-4371-5

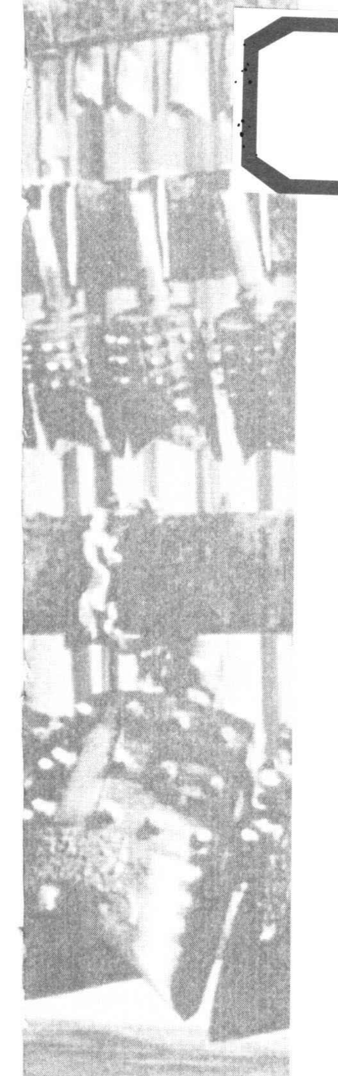


9 787542 843715 >

易文网:www.ewen.cc

ISBN 978-7-5428-4371-5/N·720

定价: 19.00 元



Philosopher's Stone Series

科学史与科学文化系列

黄钟大吕

中国古代和十六世纪声学成就



程贞一 著

王翼勋 译



上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

黄钟大吕:中国古代和十六世纪声学成就/(美)程贞一著;
王翼勋译. —上海:上海科技教育出版社,2007.8
(哲人石丛书.科学史与科学文化系列)
ISBN 978-7-5428-4371-5

Ⅰ.黄... Ⅱ.①程... ②王... Ⅲ.①声学—物理学史—中国—古代 ②声学—物理学史—中国—16世纪 Ⅳ.O42-092

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第054172号

ACOUSTICS IN ANCIENT AND
THE SIXTEENTH CENTURY CHINA

abridged translation from

Early Chinese Work in Natural Science: A Re-examination of the Physics of Motion, Acoustics, Astronomy and Scientific Thoughts

by

Chen Cheng-Yih

责任编辑　陈浩　范汜　装帧设计　汤世梁

哲人石丛书

黄钟大吕

——中国古代和十六世纪声学成就

程贞一　著

王翼勋　译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版发行

（上海冠生园路 393 号　邮政编码 200235）

网址：www.ewen.cc　www.sste.com

各地新华书店经销　江苏丹阳教育印刷厂印刷

ISBN 978－7－5428－4371－5/N·720

图字 09－2005－098 号

开本 850×1168　1/32　印张 7　插页 3　字数 160 000

2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷

印数 1－5 000　　定价：19.00 元

序

奉献在读者面前的这部译作来自美国加州大学圣迭戈分校(UCSD)物理系教授程贞一 (Joseph C. Y. Chen) 在声学史方面的两篇英文著作,它们分别介绍中国古代和16世纪声学的成就:其中第一编“中国古代声学成就”译自《中华早期自然科学之再研讨》一书的第二部分;第二编“中国16世纪声学成就” 则译自 “再论朱载堉的声学著作”(A Re-visit of the Work of Zhu Zaiyu in Acoustics)一文,原文发表于1999年由汉城大学出版社出版的《东亚科学史新近概观》(*Current Perspectives in the History of Science in East Asia*)一书。后者是作者程贞一先生研究朱载堉等比律和律管声学成就的一篇力作,其中深入地分析了朱载堉推导等比律的思路和成就。

“中国古代声学成就”的雏形原是程先生于1988年在香港东亚科学史基金会第六次讲演会上的一个报告。该报告和作者同年在香港大学所作的其他演讲经整理后合编成书,于1996年由香港大学出版社用英文出版,书名为*Early Chinese Work in Natural Science:A Re-examination of the Physics of Motion, Acoustics, Astronomy and Scientific Thoughts* 。原书分四个部分: 第一部分为“中国早期关于运动物理学的工作”, 第二部分为“中国早期关于声学的工作”,第三部分为 “中国早期关于天文学的工作”,第

四部分为“中国早期的科学观念和自然思想”。这里所谓“早期”,主要指先秦。

第一部分所讨论的内容，在中国古代的知识分类中没有形成独立的体系,因而常被人们忽略,但在近代科学兴起的过程中这些知识很重要。例如,《尚书纬·考灵曜》说:“地恒动不止,而人不知,譬如人在大舟中,闭牖而坐,舟行而人不觉也。”明确指出大地在运动,而且解释了人不知的原因。伽利略在他的名著《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》(1632年)中论述人为什么感觉不到地球在运动时,以“表明用来反对地球运动的那些实验全然无效的一个实验”为题,详细地叙述了封闭的船舱内发生的现象,从而对运动的相对性原理作了生动的阐述。《考灵曜》早于《对话》1500年以上,将这样一些原始材料收集起来加以研究,当然是很有意义的。所以该书的第一部分早在1988年即被王锦光和徐华焜译出,刊登在《科学史译丛》该年第2期上,国人早已知晓。现在译出的第二部分,更是作者有深入、独到研究的领域,相信也会受到读者的欢迎。

在中国传统文化中,声学和天文学是最早发展的、与数学相联系的两门自然科学,而且自司马迁的《史记》开始,历代的正史中多有专门篇章记述；但是近代对于声学的研究却没有达到与早期天文学相应的水平。一些没有理由的主张、不正确的时代断定和错误的理解比比皆是,诸如中国音乐单调无味,只有五声(pentatonic),缺乏半音(semitones),缺乏八度(octave)等等。对于这些错误论点,程先生在此书中均作了有力的批驳。例如,他发现《吕氏春秋·音律》在用三分损益法计算十二律时,由应钟上生蕤宾之后,本该接着下生大吕,但一反常态,仍用上生法求大吕,在大吕之后再恢复常态。他认为,这一反常行为正好说明了《吕氏春秋》时已有八度(1:2)的概念。因为,由“黄钟—宫”律调产生的其他十一律必须在1与$\frac{1}{2}$(即0.5)之间(设黄钟之数为1),不然就超出了八度音域的范

围。如按常规大吕是由蕤宾下生，其律为0.4682$\left(=\frac{2^{10}}{3^{7}}\right)$就超出了八度音域，所以才改为上生，$\frac{2^{11}}{3^{7}}$=0.9364，就避免了这个问题。他利用这一事实，改正了李约瑟的说法“中国十二律只需要最简单的算术计算，没有八度为其出发点，在中国十二律中就根本没有八度”(Joseph Needham, *Science and Civilisation in China*, vol.4, sec 26(h), p.172, Cambridge University Press, 1962)。

李约瑟《中国科学技术史》第4卷中的声学部分出版于1962年，此后的许多考古发现大大地改变了中国声学史的面貌。1978年湖北随县曾侯乙墓双音编钟及其铭辞的发现和1987年河南舞阳贾湖七孔骨笛的发现，都轰动了全世界。贾湖16支骨笛为公元前6000年新石器时代的产物，对其中一个保存完整的七孔骨笛测音的结果表明：骨笛能发出8个音，第一音和第七音之间近似八度，连同管音在内的八个音构成七声音阶。这一发现，表明中国音乐声学在人类文明的早期远远走在世界的前列。

曾侯乙安葬于公元前433年，仅在毕达哥拉斯（约公元前570~前497年）逝世后约64年，而所留下来的音乐遗产之丰富十分令人折服。该墓中出土乐器8种，计125件。最难能可贵的是，这套乐器除了一部分仍保存着其原有的音乐功能外，许多乐器与其配件还刻着有关音名和乐理方面的铭文，给我们留下来了大量能看、能听、能直接测量的乐器，特别是那套威武雄壮的双音编钟，要保持两音互不干扰的振模，所能允许的误差甚为有限。因此，用一钟两音来辨别半音阶不但需要有精密的铸造技术，还需要有极为先进的声学水平。曾侯乙编钟明确地显示，当时已有十二声音阶，音乐家们已可用旋宫原理在五个半八度音域之间进行创作和演奏；而在欧洲，直到18世纪初期的钢琴上才达到同一水平。程先生于1985年根据曾

侯乙编钟中钮钟的音名铭文和音程结构,复原了公元前5世纪推导十二半音纯律体系的角—曾法。说明中国在纯律推导上也走在世界的前列。

1988年在曾侯乙编钟发现十周年之际，湖北省博物馆在武汉召开了一次国际专题讨论会,程先生是这次会议的积极参与者,并且负责主编和翻译了会议的论文集《曾侯乙编钟研究》(*Two-tone Set-bells of Marquis Yi*)。该文集用中文、英文两种形式于1992年和1994年在武汉和新加坡分别出版。该文集中所收录他本人的三篇论文,可作为阅读本书的参考。一是《曾侯乙编钟在声学史中的意义》,二是《从公元前五世纪青铜编钟看中国半音阶的形成》,三是《曾侯乙编钟时代及其以前中国与巴比仑音律和天文学的比较研究》(与我和香港饶宗颐合作)。

我曾作为高级访问学者在加州大学圣迭戈分校和程先生合作研究过一年半(1989年1月至1990年6月),对他的为人与治学都很敬佩,对他在本书的“引言”中就科学史的一般问题所表示的一些观点也很赞赏。例如,他认为,“近代科学方法”的发展及其综合纳入自然科学,对于近代科学的形成当然是至关重要的,但“近代科学方法”只不过是人们为探索自然而建立的一种行之有效的逻辑程序系统,是近代科学的组成部分而不是全部,更不是人类认识自然的唯一通道。对科学成就的评价,不能以此作为唯一的标准。再如,他认为,科学的发展是一个动态过程(dynamic process),包含着许多矛盾因素的相互影响，不考虑这些因素的动态复合(dynamic compositions),单纯去罗列一些有利因素或抑制因素,是无益于探讨内在原因的。他的这些见解，对于国内科学史界争论的一些问题,都是有重要参考意义的。

由于本书内容比较专门,为了使更多的读者能够顺利地阅读,译者花了很多功夫,在必要的地方增加了一些乐理知识介绍,并把所有术语与《中国大百科全书·音乐卷》中的相关内容进行了比照。

译者这种认真负责的态度,也是值得称道的。在此我谨向作者和译者表示谢意,他们奉献了这么一本好书。当然,任何一本好书也不可能十全十美,读者如能指出错误或不足之处,我相信他们是欢迎的。

席泽宗

2004年6月15日

引言

20世纪40年代后期，我还在上海徐汇中学念书。那时一直困惑着我的一个问题是：为什么我们的数学教科书上没有一个来自中国文明的定理？终于有这么一天，我鼓着勇气去问教数学的刘老师。刘老师对这个意外的问题似乎有点不耐烦，用权威的口吻说："我们教的就是西方数学。如果你想学中国数学定理的话，应该去看《九章算术》。"这是我第一次听到《九章算术》这个书名，为此我很是感激，尽管对老师的回答不怎么满意。但那个时候，我又说不清到底为什么不满意。二战后，许多学生出国进修科学，我也一样致力于钻研科学，但我一直念念不忘对中国古代数学的兴趣。大学二年级写课业报告时，当年对数学老师回答不满意的理由，突然涌现在我的脑海：数学定理和科学原理是不分民族、文化和国界的！

描述直角三角形三边之间解析数理关系的一个命题——不管它曾由毕达哥拉斯(Pythagoras)证明过，在希腊文明中称为"毕达哥拉斯定理"；也不管它曾由商高证明过，在中国文明中称为"勾股定理"——都是同一个定理。同样，二项式系数的三角形表——不管它是由西方帕斯卡(Pascal)所发现，称为"帕斯卡三角形"；也不管是由中国贾宪所发现，称为"释锁法"——它们是同一个系数表。数学原理不是根据种族、文

化或国家来划分的,"西方数学定理"或者"中国数学定理"的说法,肯定是不合理的。在数学史中,种族、文化和国家的划分当然有其必要。但是,教科书讲述的是数学和科学的内容和方法,应该摆脱任何特定文明的束缚。

不容置疑,毕达哥拉斯对古希腊数学的发展起过重要的作用,但也必须承认,以他的名字所命名的定理,远在他那个时期就已出现在好几个古代文明中。近代西方学者认为,正是毕达哥拉斯的证明,才把数学从经验知识的层次提高到推理证明的水平。这种论调也站不住脚,因为所谓毕达哥拉斯证明根本就不存在。早期涉及毕达哥拉斯证明的叙述,与神话混杂在一起,没有证明的细节,也没有讲清证明的是什么定理。退一步讲,纵然证明存在过,毕达哥拉斯仍然不是给数学定理提供证明的第一人。在古希腊文明中,现存最早的证明,要算是欧几里得(Euclid)《几何原本》中的证明[1];在中国文明中,则有周朝商高的证明。关于商高证明勾股定理的"积矩法",《周髀算经》保存着相关的叙述,赵爽的"弦图"[2]中保存着证明的图解。现代的数学教科书,普遍把二项式系数的发现,归功于17世纪的帕斯卡,但这样做并不能否定,早在帕斯卡之前500年,贾宪就已经发现二项式系数的历史事实[3]。教科书是专为学生编写的,应该全面教给学生探讨知识的各种方法,不能根据种族、文化和国家的划分,来决定采取某种探讨方法而排斥另一种探讨方法。何况商高和欧几里得的证明,各有优点,也各有缺点,都可以提供给学生思考。

经过漫长的"黑暗时代"(Dark Ages),欧洲终于在14世纪,逐渐突破了宗教思想的长期束缚,迈出了那个智能停滞的时代,走上了"文艺复兴"。欧洲人不仅从阿拉伯人那里吸收到一些阿拉伯文化和东亚文化的成就,而且从由阿拉伯文译出的古希腊著作中,学到了古代希腊文化的成就,接着在殖民扩张的过程中,融合进更多文明的成就,奠定下科技革新的基础。在17世纪,科学在欧洲获得

了多方面的新发展,形成当时所谓的“现代科学”。“现代科学”带来的新技术,对人们和社会的影响,不管是幸福还是祸害,都是空前的。它的重要性得到了全世界的公认。

也就在最近三百多年中,科技在中国长期停滞不前。面对欧洲新兴的工业化国家的侵略和剥削,当时的政府不但未能采取适当的应对措施,而且也没有能意识到欧洲加速科技化在国际上的意义和对中国的影响。中国陷入了空前的落后困境,这种状况迫使中国人民奋起。有些知识分子仓促地反躬自省,想要探索中国为什么没能参与“现代科学”发展的原因。他们不加深究,即错怪古代中国文明缺乏科技基础和成就。“现代科学”革新首先出现在欧洲[4],许多学者就据此认为,西方文明存在着一些有助于科技发展的有益因素。他们同样也认为,“现代科学”革新之所以没有发生在中国,必然是因为中国文明中存在着一些有碍科技发展的抑制因素。依照这类推测,几乎中国文明所有层次和领域,或此或彼,都被认为存在着阻碍科技发展的因素,因而导致中国的落后。这种肤浅、仓促的结论,尽管出于好的动机,却会导致错误的结果,甚至会损坏中国文明智慧的“纤维”。

事实上,这一类推测无助于我们对科学发展的理解,因为它把孤立因素当作决定现代科技发展成败的原因。科技的发展是动态的,包括了许多常常是矛盾因素的相互影响。这些因素的动态复合,能随时间而迅速改变。一个生长在智力停滞、愚昧盛行的欧洲黑暗时代的学者,面对当时中国唐宋时代的科技,采用同一推测,同样会认为西方文明存在一些有碍科技发展的抑制因素,而中国文明存在着一些有助科技发展的有益因素。然而当欧洲从“黑暗时代”转入“文艺复兴”,其因素之间的相互关系显然起了变化,对宗教思想控制提出强烈反抗,实行殖民开拓,向外扩大经济贸易、文化接触,从而逐渐地建立起革新科技的基础。由此可见,任何一个文明在任何一个时代,同时存在着有益科技发展和抑制科技发展

的因素。不考虑所涉及动态过程,单靠识别和比较某些因素,是无法理解科学和技术发展的动力实质,以执行适当措施,迎头赶上,甚而后来居上的。

其实,中国没能及时参与“现代科学”发展,原因不在古代而在近代。古代的中华民族,无论是自然原理的发现,还是技术的发明,并不亚于任何一个古代民族,相反往往占有领先地位。责怪古人,只不过是后人推卸责任的无能之举,但当这种责怪牵涉到国家政策,渗透进教育措施时,其负面影响就不容低估了。我们必须澄清中国古代没有科学、只有技术的种种谬论。我们知道,科学着重于自然原理的发现和自然规律的理解,技术则从事仪器机械的发明和工业生产的开创,两者在本质上有所不同,可分别评价。但是接纳古代技术而否认古代科学的观点是错误的。有科学与没有科学的差别,并不只由所用的方法决定。

虽然“近代科学方法”的综合纳入自然科学,对近代科学的形成是至关重要的,但是,不能因此而否定在“近代科学方法”纳入科学之前的科学成就。对科学的评价不可以把方法作为唯一的标准。我们必须理解,“近代科学方法”只不过是人们为探索自然而建立的一种逻辑程序系统,一套有助于辨识自然原理的方法。它是近代科学的组成部分,并不是近代科学的全部。意识到自然原理往往是隐蔽的、难于掌握的,并不就意味着只有“近代科学方法”所发现的自然原理才算是科学。自然原理的发现决不被某一预定的研究方法所左右,“近代科学方法”决不是人们认识自然的唯一通道。历史证实,自然原理的发现,还往往涉及个人直觉、灵感、丰富的想象力和坚忍不拔的毅力。

此外,我们也应该知道,在“近代科学方法”综合纳入自然科学中之前,这种方法所涉及的一些逻辑程序,虽不齐全,但多多少少已在古代有所实践。就拿中国古代处理自然共振原理的发现来说,周庄对鲁遽所发现的共振现象的叙述,不仅提供了鉴证共振现象

的拨瑟实验,而且指出了共振的必要条件"音律同矣"。这个叙述兼具观察、证示和结论的性质,是一个有逻辑程序的记录。《吕氏春秋》对共振现象的叙述,进一步以"相应"作为共振的机理,尽管没能讲清相应过程的细节,但在公元前3世纪就能以"声比则应"来说明共振原理,的确具有科学水平。

毫无疑问,在科技突飞猛进的今天,"现代科学"应当是培育大、中学生的重要科目,这本来就是科学发展的正常步骤,科学本身是在不断地改进和充实的。随着科学的发展,学习科目也应该改进。不过同时,我们也不能忽视我们的古代文明所建立的科技基础和已获得的科技成就。古代中国不但在自然科学方面的光学、力学、声学、天文学等领域有着杰出的成就,而且在数学领域也有辉煌的成就。然而,大多数近代中国知识分子,不知道这些成就,在学习生涯中,也没有受到适当的相关教育。一个失去自己文明精华和自信的民族,不可能适当地吸取和融合另一个文明的精华,不可能由此而青出于蓝,开拓出新的天地。

20世纪西方哲学家怀特海(Alfred North Whitehead, 1861~1947)在和普赖斯(Lucien Price)访问会谈中,说到他对近代中国人的一些看法:

> **我对中国人尚不能断定。他们的文化发展似乎没有连续性,从公元前500年起到1200年,他们似乎没有什么发展可言。到了现代,他们似乎想要尽可能地美国化。倘若他们果真成功地成为20世纪的美国人,他们是否还有能力由此再走上自己的道路?或者他们又会累世不变,保持像20世纪的美国人?**[5]

尽管怀特海对中国古代文化的认识尚欠成熟,而且他的看法还有待商榷,但他所提出的文化发展"连续性"和中国人"是否还有能力继续走自己的道路"的论点,确实是值得我们注意的警示。

虽然欧洲“现代科学”的知识革新，比以往任何知识革新都更为显著而深入，但它毕竟只是科学发展的一个阶段。当时所谓的“现代科学”的牛顿力学(Newtonian Mechanics)和麦克斯韦电磁学(Maxwell Electromagnetism)，今天已成为古典力学和古典电磁学。人们不能把欧洲“现代科学”的革新误认作科学发展的开始，从而否认这场革新之前的科学成就，更不能接受某些西方人鼓吹的唯有西方文化才能产生科学的谬论。“现代科学”的革新无疑是欧洲的一大成就，然而这场革新的智能基础，仍然建立在源自多种古代文化的成就的基础上。这个基础的范围，远远超越古代美索不达米亚知识革新时底格里斯和幼发拉底两河流域各文化的范围；远远超越古代希腊知识革新时地中海沿岸和岛屿各文化的范围；也远远超越古代中国知识革新时黄河和长江两河流域各文化的范围。人们对“现代科学”的知识革新，应该有一个恰当的认识，不能让激情掩盖了理智。我们必须清楚地懂得，现代科学和技术扎根在多种文明的传统智慧之中。

本书汇集、编译了作者介绍中国古代和16世纪声学成就的两篇声学史著作:“中国古代声学成就”译自《中华早期自然科学之再研讨》一书的第二部分[6]，“中国16世纪声学成就”译自“再论朱载堉的声学著作”一文[7]。虽然这两篇著作只不过介绍了中国文明在声学上的一部分成就，但已经足以揭示中国文明科学和技术的智能基础，足以显示中国文明在理论和实践上的能力与智慧。古代中国文明对雷声、共鸣等现象的分析，对声音的律、量、质特征的辨认，对发音和传播的解释，都有其精辟独到之处。在创建和推导律制上，古代中国的成就更是卓越。三分损益律制是世界上现存的、最早用五度生律而没有最大音差问题的十二律体系。公元前5世纪，古代中国已推算出十二半音纯律体系[8]。就是作为当时欧洲主调音乐的主要律制体系——等比律的推算，也是首先出现在16世纪的中国。我们知道，纯律、三分损益律和等比律三者，也正是现今音乐

界的三大律制体系。在实践方面，古代中国的成就同样辉煌。例如，率先成功地实施律音的标准化；利用钟的双音特性，首创超出五个八度音域的演奏乐器；根据“管短气宽”实验的结论，进行律管管口校正。这些有实质意义的古代科技成就，的确无愧于后代。虽然西方近代的声学成就已处于支配地位，西方律名和用辞已普遍采用，但我们不能因此而让古代中国的辉煌成就湮没。

这两篇著作之所以能与中文读者见面，全靠刘钝教授的全力支持和王翼勋教授的精心翻译，作者在此谨表衷心感谢。两篇著作本来彼此独立，现合并成一书，为避免内容的重复和风格的不一致，我在校审本书中译本时，作了一些编辑和修改。同时，在“中国16世纪声学成就”这部分，改写了“历史的回顾”一节（第5.1节），增补了“评论和评价”一节（第5.4节）。

感谢Hong Kong University Press 和 Seoul National University Press 惠允上海科技教育出版社出版中译本。

我希望这本书可供大、中学生参考。

提请注意的是，本书所载的声学成就，只是古代中国科技成就中的一小部分。

程贞一

2004年

内容提要

中国三千多年的音乐声学,源远流长,乐律文献史料丰富。系统地研究中国古代音乐声学,并对不同文明中的声学发展和成就,作出适当的比较和评价,是世界科技史、音乐文化史不可或缺的重大课题。

然而,多数现代读者所感受的音乐知识,基本是起于西方18世纪的古典音乐和近代的电子音乐,其中潜移默化占主导地位的,似乎就是西方近代的声学成就。更有甚者,由于西方史学家对中国科学技术(包括声学)发展史存在偏见,导致古代中国的音乐声学成就,不仅在西方没有得到适当的评价,就是在近代中国,也没有得到充分的认识。

本书以原始文献记载和出土文物为依据,系统地分析古代中国在声学和律学方面的成就,并驳斥了西方学者的种种误解和偏见。

本书致力于证实,古代中国的三分损益律制是世界上现存的最早用五度生律而没有最大音差问题的十二律体系。早在公元前5世纪,中国已经推算出十二半音纯律体系。即使是等比律,这个欧洲主调体音乐的主要律制体系,也首先出现在16世纪的中国。

本书列举大量事实,描述古代中国辉煌的声学实践。例如,率先成功地实施律音的标准化;利用钟的双音特性,首创超出五

个八度音域的演奏乐器;根据“管短气宽”的实验结论,进行律管管口校正等。

作者简介

程贞一(Chen [Joseph] Cheng-Yih),1933年出生于南京。美国圣母大学物理化学博士,1961年任美国布鲁克黑文国立实验室副研究员,1965年当选为美国物理学会会员 (fellow),1966年任美国加州大学圣迭戈分校物理学终身教授。长期从事研究量子碰撞理论，首先用法捷耶夫方程解电子氢原子三体散射问题。在分子振动能级激发、共振散射、分子结构和能量转移方面取得成果。曾任英国曼彻斯特大学访问讲师,美国联合天体物理研究所(JILA)访问学者,北欧理论原子物理学研究所(NORDITA)访问教授,清华大学(台湾)特约讲座教授，阿根廷原子中心南美多国物理规划访问科学家。发表100余篇物理学专论。除活跃于物理学领域外，他曾在美国于1988年举办日本细菌战国际研讨会,1986年举办国际中国科技史研讨会。任1988年第五届中国科学技术史国际学术会议组织委员会主席,2001年第九届中国科学技术史国际学术会议组织委员会主席之一。1980年在加州大学开设中国科技史课程(UCSD中国研究 170),授课24年。他还担任“为公东亚科技史丛书”主编。

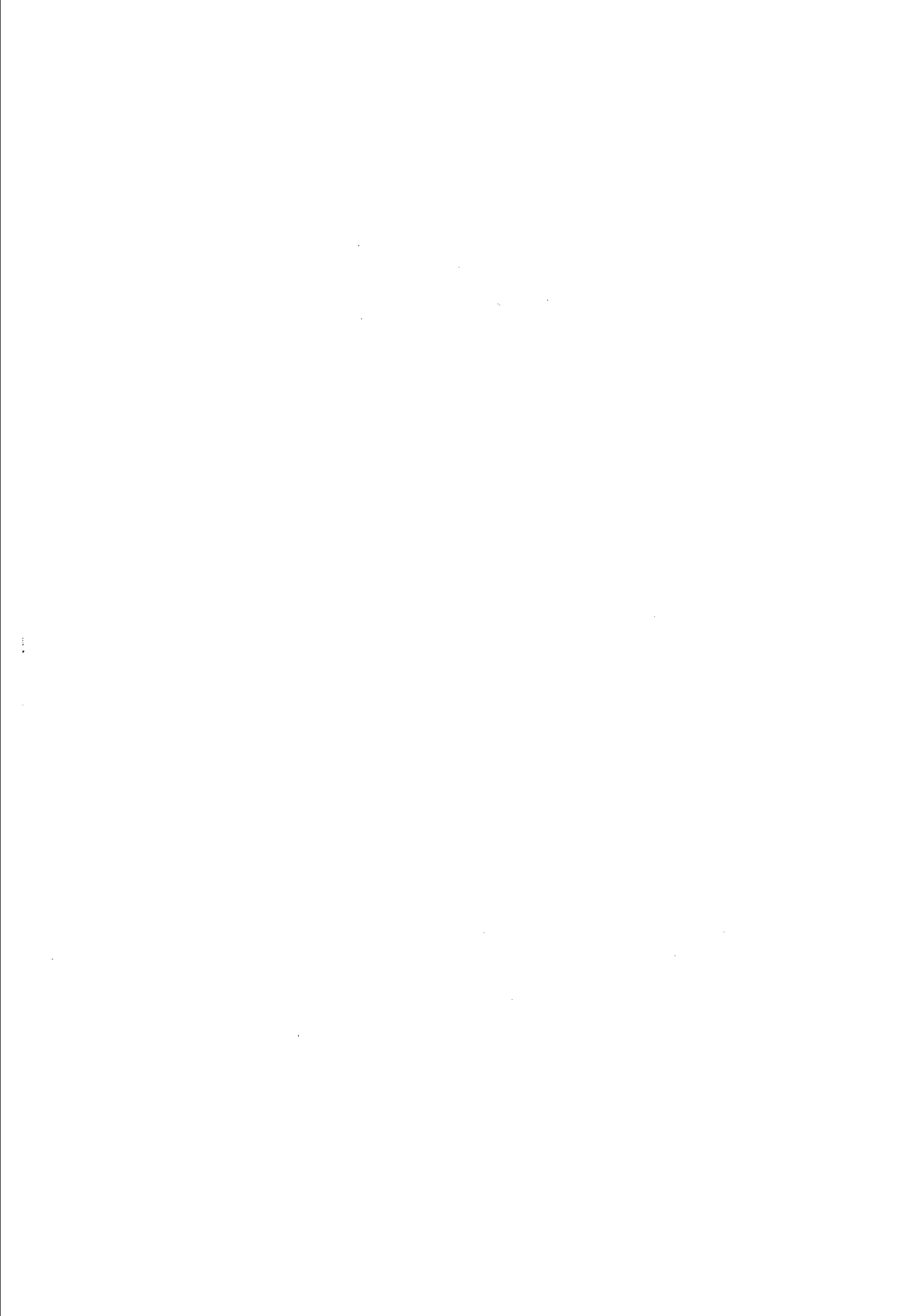
目录

目录

第一编

中国古代声学成就

我们周围的世界充满着声音。人类本能地体验到声音。早期的人们虽然尚不知道,耳朵所听见的感觉来自弹性介质——空气进行的机械波运动(这些波动是纵向声波在空气中传播所产生的搅动),也不知道听觉系统的神经和生理的特性,但他们凭着对声音的感知和感觉,作出敏锐的分析,取得了辉煌的成就。本编我们要讨论的是古代中国人对声音的感知,对声音物理性质的理解,以及中国人对音乐声学作出的杰出贡献。



1 声音的感知

人对声音的感觉分三个方面:音律、音量和音质。这三个声音特性的辨认,虽出于人们的主观感知,但却与声音的三个物理特征相对应。音律与频率相应,音量与振幅相应,音质与声音的泛音(或谐音)结构相应[1]。

春秋战国之前,"声"和"音"两个字是分开来用的,严格说来,含义并不相同,到后来才变成同义词,合为一般所用的"声音"。《史记》[2] 记录着声和音两字当初的定义:

> 单出曰声,杂比曰音。
>
> 【释文:单独发出的声音称之为声,混合相近的声音称之为音。】

这个定义从现代声响学观点看来,虽然不够精确,但它至少证明了,声和音两字之间曾有过精细的差别。直到今天,汉语"四声"中的"声"还是不用"音"来代替的;音用在和声方面,表示谐和关系,例如"协和音"的"音"[3]。本书中有关"声"和"音"的释义,将参考上下文而分别解释。

1.1 音 律

古人把与声波频率相关的感知称为"音律",简称为"律"[4]。现存文字记载中,最早提到"律"的是《虞书·舜典》

篇，因收集在《尚书》中而流传下来：

诗言志，歌永言，声依永，律和声[5]……

【释文：诗以词句来表达思想，歌以咏颂来唱出诗词，声用来便于咏，而律用来协调声……】

这似乎表明，舜时代已经存在音律的某些标准了。《虞书·舜典》篇中另一处记载了舜继承帝尧之后实施的重要政策，其中有：

同律度量衡。

【释文：把音律、度量、衡制同准（即标准）化。】

上面的两条记载相互吻合。另一篇《虞书·益稷》有"六律"一词最早的记载，"予欲闻六律、五声、八音"。可惜这句话过于简略，没有写明六律的具体名称，无法作进一步考证。这里说的六律，就是后来《国语》所载的六律（见下文）。但把六律与五声、八音并列提出，这件事本身就很有意义，反映出在尧舜时代[6]六律在音乐上的重要性。

现在我们知道，音律的不同来自声波频率的不同。低律对应低频率；高律对应高频率。不同文化对律高低的描述用语，各有不同。罗马人称高律为削尖（acutus），低律为沉重（gravis）。中国人称高律为清，低律为浊。然而，人们的听觉系统对高低频率的灵敏性有一个范围，这范围因人而异，约从25 赫兹到 18 000 赫兹[7]。古代中国人虽然不知道人耳听觉的高低律定量范围，却很早就已意识到有一个范围存在。《国语》记载，公元前 522 年，周景王和大臣单穆公有段对话。周景王决定熔化无射钟，改铸成音律较低的大林（即林钟别名）

钟。单穆公劝说周景王放弃这个决定。他说：

耳之察和也，在清浊之间。
其察清浊也，不过一人之所胜。
是故先王之制钟也，大不出钧，重不过石。
律度量衡于是乎生[8]。
【释文：耳朵的听觉功能最能和谐地适应的，是在音律高低的范围之间。
要辨认确定这个音律范围，不是个人所能胜任的。
为此，先王铸钟，从不超越以钧所定之尺寸和以石所定之重量，
这就是律、度、衡各量制的由来。】

句中的"钧"和"石"，分别是古代的体积单位和重量单位。单穆公的话表明，当时人们对音律有了正确的认识，知道人耳对高低音律的辨察有某种范围；还表明，先王铸钟采取的是标准化音律。可惜的是，这段记载没有说明单穆公说的是哪一代先王。

《国语》还有一段周景王与乐师州鸠在公元前 522 年对话的记载。州鸠说，通过在"六律"中插入六个称作为"六间"的"间隙律"，可以得到"十二律"。这些律名分成"六律"和"六间"两大类：

六律：黄钟，太簇，姑洗，蕤宾，夷则，无射。
六间：大吕，夹钟，仲吕，林钟，南吕，应钟[9]。

《月令》和《周礼》也记有这些律名。但《周礼》中六个"间隙律"不称"六间"，而称"六同"，定为"阴声"，原来的"六律"则定为"阳声"。

这就是说，不晚于公元前6世纪，古人就有了作调音用的“十二律”。而这“十二律”是在“六律”之间，用六个“间隙律”加以划分而得。那么，最初的“六律”怎么来的呢？州鸠说：

律所以立均出度也，
古之神瞽考中声而量之以制。
度律均钟，百官轨仪。
纪之以三，平之以六，成于十二，天之道也[10]。
【释文：音律范围和度的确定，以古代神瞽考核并测定的中声为制。
所定音律度量和调谐准的钟，成为百官遵守的标准。
［以中声为基准，］先确定三个律，接着均分三律成六律，最后相参六间而成十二律，
这是大自然的规律。】

可见，六律之前还有三律（见第3.1节），先确定“中声”，再衍变成十二律体系。

3世纪的《国语》注释家韦昭，讨论州鸠所说律的调制和测定，为这一段作注：

均者，均钟木，长七尺，有弦系之，以均钟者。
【释文：均，一种仪器，指均钟木，七尺长，张着（单根或多根）弦，用来调音。】

韦昭的注释提供了古代音律调节法的线索。为什么“均”字解作调音器，值得进一步分析。仔细考察，在字面上，“均”解为“均匀”、“相等”或“平衡”。调音过程使律均匀相等，于是不难理解，均就是调音。韦昭所说的七尺调音器，性

质上类似于波伊提乌(Boethius,公元480~524年)所提到的希腊文明中的单弦调音器[11]。所不同的是,有证据表明,中国的七尺调音器也许不止一根弦(详见图4.3.2)。

1.2 音量

音量是听觉对声音强弱的感知,可客观地用声波的振幅加以度量,这是因为音量的差异主要来自声波振幅的变化。如果两个声波频率相同,振幅大的声波音量就大,振幅小的音量就小。古人称音量响的声音为“大音”,音量弱的声音为“细音”[12]。

古代音乐家很注意音乐演奏时各种乐器的交响,对合奏乐器的安排也十分重视,其原则是避免音量大的乐器(如钟、锣)压抑音量弱的乐器(如琴、瑟),保持大音和细音的音量均匀和平衡。《国语·周语》最早讨论到合奏交响的理论和安排乐器的原则:

> 声应相保曰和,细大不踰曰平。
> 细抑大陵,不容于耳,非和也。
> 听声越远,非平也。
> 【释文:声音配合适当,相互保持均衡,称之为和,
> 当细音和大音互不超越,称之为平。
> 如果细音压抑,大音出陵,以至耳朵不能相容,也就无和可言。
> 如果可听声音响度,超越过远,也就无平可讲。】
>
> 故乐器,重者从细,轻者从大[13]。
> 【释文:因而乐器的安排,应该做到:
> 重乐器(如钟、锣)随从弱音量,而轻乐器(如琴、瑟)

要随从响音量。】

这是说,各种乐器一起演奏时,要应用音量平衡、和谐的原理适当安排。

音量还有个明显的问题,就是声音的可听限度,在现代被称为听阈。听阈不仅取决于响度,而且取决于频率[14]。老子对可听限度作过有趣的观察,似乎意识到听觉阈的存在,因为他提出“希声”的概念。《道德经》说:

听之不闻名曰希。
【释文:听了却似乎没有听见,称为希。】

由此可见,老子所谓的“希声”就是听之不闻的声音,一种频率较低,似乎存在,但是耳朵无法听到的声音。李约瑟(Needham)翻译“希声”为“纤细的音”(tenuous note)。由此看来,“希声”似乎与现代概念“听阈”有某种关系。

老子那个时代,没有频率和振幅的概念,不可能用频率、振幅概念来刻画“希声”,但他也许意识到,“希声”是音律很低的声音,它们的可听限度在感觉上依赖于响度。他说

大音希声。
【释文:响音中出希声。】

这句话也许指那些听不见的低律音在高一层响度中可听见。作为道家的一个论点,“大音希声”难免含有哲理的隐喻。即便如此,老子能利用“希声”的音响知识来比喻哲学思想,也是非常有意义的。

1.3 音　质

音质,亦称音品或音色,是听觉对声音动态结构的感知。不同的人或不同的乐器所发出同一频率、同一振幅的音,仍各有其不同的特色,这正是音质的作用。正如小提琴和钢琴发出的同一响度的同一律音,听起来就是不一样,这是因为我们所听的,是同一律音的两个不同频谱。这两个频谱不仅在上分谐频(即谐音或泛音)的结构上有不同[15],而且各谐频的振幅也有差异。

现代音响学表明,声音的音质是由频谱的上分谐频动态结构决定的,单频纯音不存在音色问题。声音的音质结构可以用频率分析器作观察分析。古代音律学家没有能得益于以上所说的这些音质知识和频谱分析的仪器,他们对音色的理解,建立在听觉的感知上,但他们的成就是显而易见的。

古代中国人十分重视音色,很早就注意到发音材料各具有其本质的特定音色,并产生了以发声材料来分辨音色的措施。例如,把排箫、笙的音色识别为竹音[16],把瑟和琴的音色识别为丝音。这种措施促使人们去寻找丰富的音色材料,逐渐地分辨出八种独特的音质,统称为八音。《虞书·舜典》上有现存最早的“八音”记载,如描写哀悼尧帝过世的场景时,他说:

> 百姓如丧考妣。三载,四海遏密八音。
> 【释文:百姓服丧如同他们自己父母的去世,
> 整整三年,四海之内没有八音。】

这就是说,尧舜时代[17]就可能辨认出八类不同的音质了。

《虞书·舜典》中还有一段舜王和乐师夔的对话,说:

> 声依永,律和声,八音克谐。
>
> 【释文:声用来吟咏,律用来协调声,八音用来丰富和声。】

这句话赞叹和声音色的微妙。前文提到《虞书·益稷》的"予欲闻六律、五声、八音"一句中,就有"八音"一词。

《左传》也提到"八音",但现存资料中,第一个列出金、石、土、革、丝、木、匏、竹这八个音质名称的是《周礼》,各用一个发音材料代表一类音质。《周礼》明确周代制度中乐官和乐师的责任。大师这种乐官的职责,是用两组六律协调"阴"和"阳",制定音乐,

> 皆文之以五声:宫、商、角、徵、羽;
>
> 皆播之以八音:金、石、土、革、丝、木、匏、竹。
>
> 【释文:音乐皆由五声的音调来创作:宫、商、角(jué)、徵(zhǐ)、羽。
>
> 音乐皆用八音的音色来表演:金、石、土、革、丝、木、匏(páo)、竹。】

周代作乐制度中,演奏所用音色的选择,因礼仪场合、季节的不同而不同。不同仪式的音色由不同乐器配合而成。各种不同典礼上所用乐器的清单,《乐记》和《周礼》多有记载。

有些学者把"八音"作为乐器的分类,这种做法并非完全出乎意外,因为乐器与音色本来有着紧密的关系。谢弗纳(Schaeffner)在1936年评论说,八音"也许是所有文明中现存最早的乐器分类"[18]。李约瑟和鲁宾逊(Robinson)把古代中国八音分类与古希腊罗马的乐器分类进行比较,他们的结论

是，希腊、罗马把乐器分成风乐器、弦乐器和打击乐器，更合乎科学[19]。需要指出的是，中国的八音分类是音色的分类，并不是乐器的分类，尽管音色和乐器两者之间存在固有的本质联系。

从音质角度来分析，古希腊、古罗马把乐器分成风乐器、弦乐器和打击乐器，同样不能令人满意。各种打击乐器所发的音，虽然在音质上具有打击乐器的共同特点，一般说来，总是与弦乐器或风乐器的音质有区别。但是同为打击乐器音，铜膜鼓发的音，与兽皮定音鼓发的音，在音色上也有着基本的差异，铜膜鼓具有金属性音色，而兽皮定音鼓具有皮革性的音色。所以说，乐器的分类和音质的分类是不同的。除了《乐记》一书不提八音，并把金、石、丝、竹列为乐器之外，一般中国的音乐古著，都把八音作为八种音质，对“八音”术语的应用和“乐器”术语的应用，一直是相当明确具体的。

此外，中国古代也有过类似古希腊、古罗马乐器分类的尝试，把琴、瑟等弹奏乐器称为“弦”，把箫、笛、竽、笙等吹奏乐器称为“簜”[20]，只是鼓、缶、钟、磬等打击乐器没有一个总称，有时用“鼓”一词泛指。其实到目前为止，现代音响学还没有一个适当、简明的音质分类体系。现代所谓的击声乐器、膜声乐器、弦声乐器、电声乐器、气声乐器的五类分法，是另一种以乐器为基础的分类法，不能作为音色的分类标准。如前所说，声音的音质是由频谱的动态结构而定的，每个声音具有其独特的和声频谱和波形。

除了发音材料的音色之外，古人当然也知道，同一发音材料制作的不同乐器，音色特征也会不同。追求不同特征音色的兴趣，毫无疑问地促进了人们研究和开发不同乐器的尝试。《诗经》提到的乐器多达29种。《周礼》在叙述乐官技师的职责中，讲到乐官“典同”的职责时，用相当长的篇幅，讨论乐器

各部的发音和各种典型的声音。典同的主要职责是管理乐器,包括乐器的构制和保管。现记录这些讨论于下:

高声䃂,正声缓,下声肆。
【释文:高部出压抑的声音,
正部出渐变的声音,
下部出刚健的声音。】

陂声散,险声敛。
【释文:斜部出分散的声音,
悬部出聚集的声音。】

达声赢,微声韽,回声衍。
【释文:达声增强,微声减弱,回声反响。】

侈声筰,弇声郁。
【释文:敞开的声音无阻,
封闭的声音沉闷。】

薄声甄,厚声石。
【释文:薄部出清脆的声音,
厚部出厚实的声音。】

这里必须说明,原文中所用术语,有些已查不到特定的解释和定义,上面的释文只供参考。即使如此,这段原文也清楚地表明,构制乐器应考虑种种不同的声音。

2 世纪的评论家郑玄(公元 127 ~ 200 年)认为,这些文字指钟音的分类。《考工记》关于铸钟的记载,部分地支持郑玄的观点:

钟已厚则石，已薄则播，侈则柞，弇则郁。

【释文：厚壁钟发出沉重厚实的声音，

薄壁钟发出分散的声音，

钟开口处发出悠扬的声音，

钟封闭处发出沉闷的声音。】

有些《周礼》注家则不同意郑玄的观点，认为十二种声音的分类适用于所有乐器，因为这些文字不在专管钟的“钟师”条中，而是出现在主管乐器的乐官“典同”条中。

我们注意到，紧跟着“典同”条十二声分析之后，有这样一句说明：

凡为乐器，以十有二律为之数度，

以十有二声为之齐量。

【释文：无论制作什么乐器，都必须用十二律确定音的度数，

用十二声保持音的质量。】

我们认为，十二音的应用并不局限于钟的构制。

发音材料和乐器构造会影响音色，古代乐师还关注着不同演奏技巧所带来的音色变化[21]。音色变化在音乐上的欣赏价值，因古琴的盛行而大为增强[22]。古琴是只有弦和徽、没有(弦乐器上的)品、柱、桥、马的乐器，任何一音经手指操作，都可发出多种音色。一位高明的琴手用精细的手指技法，能展现出无穷的音色变化。李约瑟和鲁宾逊评论说：

在同一弦上辨认个别分音(泛音)，早在嵇康(公元223～262年)时代已颇有进展。相反，在欧洲这一项技巧发展得相当晚，不会在18世纪之前。事实上，演琴的

技巧主要依赖于在同一个律上，拓展出不同的音色，这一技巧在南宋（12 世纪）已经发展得很完善了[23]。

古代中国音乐家对弦乐器演奏的音色变化十分敏感。按公元前 239 年《吕氏春秋》和公元前 120 年《淮南子》的说法，演奏琴、瑟的技术在秦、汉之前就达到了很高的艺术水平。

2 声音的物理性质

古代中国人对声音特征的感知，无论对于音律、音量还是音质，都有相当准确的认识。本章根据中国典籍原文，介绍古人对声音的物理特性的认识。

2.1 雷声的分析

确实，各个文明时期的人们都曾感受过雷声的巨大威力。古人为暴风雨的电闪雷鸣所震撼。对雷声主观的描述和神化的推测，普遍地出现于不同文化中。在此我们要讨论的仅是古代中国对雷声自然特性的客观认识。以下是一些出于中国典籍的记录：

动万物者，莫疾乎雷[1]。
【释文：使万物隆隆振动者，没有比雷更快的。】

阴阳分布，震雷出滞[2]。
【释文：阴阳的分布，产生内部的摩擦，而后发出的雷鸣。】

震，雷也；电，霆也[3]。
【释文：震引起雷，电产生光。】

这些古代记录反映出当时人们对雷声的客观描述，试图

描述雷声的特性和认识雷声的产生。

古代中国人认为振动和电闪来自阴阳的相互作用。《乐记》借助“气”的概念,解释阴阳产生雷电时的相互作用:

> 地气上齐,天气下降,阴阳相摩。
> 天地相荡,鼓之雷霆,奋之以风雨。
> 【释文:地下上升的气和天上下降的气,导致阴和阳相互摩擦,
> 地和天相互搅动,最后是雷电的振动和风雨的冲刷。】

远在古文明发展早期,气的概念就同阴阳的概念一样,成为重要的科学概念和哲学概念。气可看成阴阳交互作用的媒体介质,也是自然界所有事物的基本实质。

远古的这些关于雷声的观点,对后世学者也有所启示。公元前120年的《淮南子》称:

> 阴阳相薄,感而为雷,激而为霆。
> 【释文:阴和阳相互冲撞,引起雷声,激出光亮。】
>
> 疾雷不及塞耳,疾霆不暇掩目。
> 【释文:雷之快,其短促的瞬间来不及捂住耳朵,
> 光之快,其一刹那间来不及闭上眼睛。】

我们看到,古人对雷电的物理现象和成因很感兴趣,试图合理地解释光和雷现象。尽管阴、阳、气这三个概念,按照现在标准来看,并没有精确地定义过。即便如此,当时已能应用抽象概念来解释自然现象,显示出古人了解大自然的企图和愿望。

2.2 声音的发生和传播

古代中国人似乎很早就意识到振动与声音之间的关系，早期的具体记载见《考工记》。主管造钟的凫氏肯定知道物体振动会发出声音：

> 薄厚之所震动，清浊之所由出[4]。
>
> 【释文：由于钟壁的厚薄，振动时会相应生成高律和低律。】

这表明凫氏不仅知道钟声由于振动而产生，而且意识到，钟壁厚度和所生声音的音律有着某种关系。

中国古代语言中，“疾”意味着快，“舒”意味着慢。快速振动产生声音叫“音疾”或者“声疾”，相当于现在频率高的声音；而慢的振动产生声音叫“音舒”或者“声舒”，相当于现在频率低的声音。《考工记》用这样的术语描写钟和鼓的发音特性。值得强调一下“疾”、“舒”两字与“清”、“浊”两字的关系。“清”和“浊”是以人耳感知对声音频率高低的主观辨认，用以分辨音律；而“疾”和“舒”以振动快慢的物理现象，描述对声音频率高低的客观辨认，用以分辨发音的振动速度，即音频。

对于声音的物理性描述和感知性描述之间关系，《管子》明确地说：

> 音疾以清，[音舒以浊。][5]
>
> 【释文：振动快的声音音律高，
>
> [振动慢的声音音律低。]】

这清楚地表明，尽管早期音乐家还不能定量地描述频率，但他们确实认识到音律不同来自振动速度不同，两者存在正比关系：振动越快，音律越高。

关于声音怎样从一处传到另一处，《考工记》说：

> 钟大而短，则其声疾而短闻，
> 钟小而长，则其声舒而远闻[6]。
> 【释文：大而矮的钟，产生的声音振动快，传得近，
> 小而高的钟，产生的声音振动慢，传得远。】

这段话讨论钟声传播的距离范围，很有意思。现在知道，声音传播的距离与声音的频率、振幅有关，频率、振幅则由钟口孔径和钟身高度所确定，这是在给定敲击力下，与钟振动频率f、振幅a有关的两个主要参量。现代音律学中，声波的强度I与频率f、振幅a的平方有如下比例关系：

$$I \propto f^2 a^2$$

同时，在开放的空旷场所传播时，声音强度与发音点距离的平方成反比。由此可知，在一个固定距离上，可听声音是由其频率和声波振幅所确定的。古代铸钟匠发现钟声的可听距离，取决于钟的孔径和长度，他们的发现与此基本相符。

凫氏的实验观察，及他关于钟声可听距离取决于钟的孔径和长度的结论，是迈向对声音传播的物理性质作科学探究的极有意义的一步。中国古代借用描写水质的用语“清”（清澈）和“浊”（浑浊），来描写音律的高和低。由此可推，古人可能很早就借助水波传播的模式来类推声音的传播。但现存资料中，找不到比公元1世纪《论衡》更早的相关记载。

针对当时流传着天能听到人讲话（“天闻人言”）的迷信，王充（公元27～97年）在《论衡》一文中作了长篇的批驳，正是

在这篇批驳中人们看到最早关于这种水波类推的记录。王充说，人声不可能传到天那么高，正如蝼蚁声不能传到高楼楼台一样。一个人坐在楼台上，无法听到地面蝼蚁发出的声音，因为所处的高度超出蝼蚁声音的传播范围，使得“声音孔气，不能达也”。他又利用小鱼搅动水面的水波，再次进行类推，估计水波的传播距离：

所振荡者不过百步，
而一里之外淡然澄静，离之远也。
【释文：波动范围至多不超出一百步。
一里之外，水面明晰平静，这是因为远离（鱼的搅动）。】

这幅示意图，清晰地显示王充怎样想象声音传播的思维过程。

2.3 共振现象

发现声音的共鸣现象是很早的事，传说在古代中国第一个发现共振现象的是西周乐师鲁遽，《庄子》一书中有这样一段以实例证示的叙述：

吾示子乎吾道，于是乎为之调瑟，
废一于堂，废一于室，
鼓宫宫动，鼓角角动，音律同矣[7]。
【释文：让我演示我调瑟音的方法：
一只（调好的）瑟放在大堂，另一只放在房中。
拨动一只瑟的宫音弦，会使另一只瑟的宫音弦振动，
拨动一只瑟的角音弦，使得另一只瑟的角音弦振动，

这是因为它们具有相同的音律。】

值得注意的是,庄周在这个记录中,不仅叙述鲁遽发现的共振现象,提供见证共振现象的拨瑟实验,而且指出共振的必要条件:"音律同矣。"这个记录极有意义,包含观察、证示和结论,是一个有科学水平的记录。结论所指出的共振必要条件,也是共振原理之一,那就是说,两个振体(如瑟弦)必须有相同音律(即频率),才能出现共振现象。鲁遽的发现经过庄周的叙述,引起广泛注意,后世才多次出现类似记录。

公元前239年的《吕氏春秋》首先提出共振的机理,说:

声比则应,
故鼓宫而宫应之,鼓角而角动[8]。
【释文:律相匹配的音能够感应,
所以,一只宫音振动,另一只宫音会响应,
一只角音振动,另一只角音会响应。】

这段叙述表明在《吕氏春秋》时代,中国声学家已意识到共振现象是一种"相应"的作用。提出"相应"作为共振的机理,进一步地说明共振原理。"声比则应"虽仅四个字,但精确简明地概括了共振原理,"比"和"应"是两个关键性术语。"比"是"比较",表示律的匹配,这是第一个条件。"应"含有"响应"的意思,用来强调共振是一种感应作用。虽然没有说明相应过程的细节,但在公元前3世纪,提出客观"声比则应"物理概念来解释共振现象,说明当时中国声学已把共振现象视为是自然现象,这的确是一种实事求是的治学态度。

这些声音共振术语在鲁遽时代,也许还没有制定,但到秦、汉时代已成了声学界普通的知识,被广泛使用。《周易·

文言》篇也有同样简明的说法："同声相应【释文：律相等的声音彼此相应】。"公元前135年，董仲舒《春秋繁露》说：

试调琴瑟而错之，
鼓其宫则他宫应之，鼓其商而他商应之，
五音比而自鸣，非有神，其数然也[9]。
【释文：琴瑟之类弦乐器的调音测试能调节音的距离，
宫音的弦应该导致其他宫音弦响应，
商音的弦应该导致其他商音弦响应，
当五音与它们的音律匹配，每一个都能导致共鸣，
这里并没有任何超自然的事物，全都取决于律的数理。】

显然，相应共振现象早已是弦乐器调音的测试手段。董仲舒的叙述不仅提到共振自鸣在实际中得到应用的一面，而且反驳了对自鸣的迷信，指出自鸣只不过是律数的表现，是一种与神无关的自然现象。

在此值得回顾一下当时声学界的治学态度。除了上述基音频率相同的共振现象外，与鲁遽有关的还有另一个观察的传说。《庄子》记载：

夫或改调一弦，于五音无当也。
鼓之，二十五弦皆动[10]。
【释文：如果改调一根弦的律，使它与五音都不相当；
拨动这根弦时，会使（瑟的）二十五根弦全部振动。】

由于不能重复实现以检验这个观察结果，当时声学界就没有把这个观察看作是共振现象。公元前120年的《淮南

子》作出下列解释,说:

故叩宫而宫应,弹角而角动,
此同音之相应也。
其于五音无所比,而二十五弦皆应,
此不传之道也[11]。
【释文:拨宫音导致其他宫音响应,拨角音导致其他角音振动,
这是因为音律相同所起的相应作用。
至于一个与五音无比的律,可使二十五弦全部响应,
这种结论是一个不传之道,不会传播下去。】

《淮南子》的解释是建立在实际试验的基础上的。很明显,淮南子门下的学人没有能够成功地观察到这个"二十五弦皆应"的现象。这说明当时声学界对试验和重复验证加以重视,的确是值得赞扬的治学态度,这种治学的精神具有科学的客观性。

2.4 钟的音响

中国古代文明中,钟或者作为乐器,或者作为标准律的律钟,都起过重要的作用,推动着古代声学的发展。现存的记录证实(见第2.2节),古人用钟研究过发音与振动的关系,观察过钟声传播的距离。同时对钟的结构与钟声的音质也作过一些研究(见第1.3节)。本节考核古代编钟的音响性质。

据考古发掘,钟大约出现在公元前3000年左右。新石器时代就有黏土制作的钟[12]。不晚于商朝初期,出现了青铜铸成的钟。钟在它本身的整个发展过程中,起过许多不同的作用。古代的钟大体上分礼钟和乐钟两大类。礼钟主要用于礼

教方面的典礼和信仰。乐钟演奏音乐,往往编排成组,称为编钟。编钟需要经过和声方面的调节,发出的钟声能构成音程[13]、和音与音阶。中国历史上,编钟在物理声学和音律学之间起着重要的桥梁作用。图 2.4.1 是 1978 年在曾侯乙墓中发现的编钟[14]。镈钟上的日期表明,这是楚酓章王送给曾侯乙葬礼的礼品。据钟铭文考证,曾侯乙入葬于楚惠王 56 年

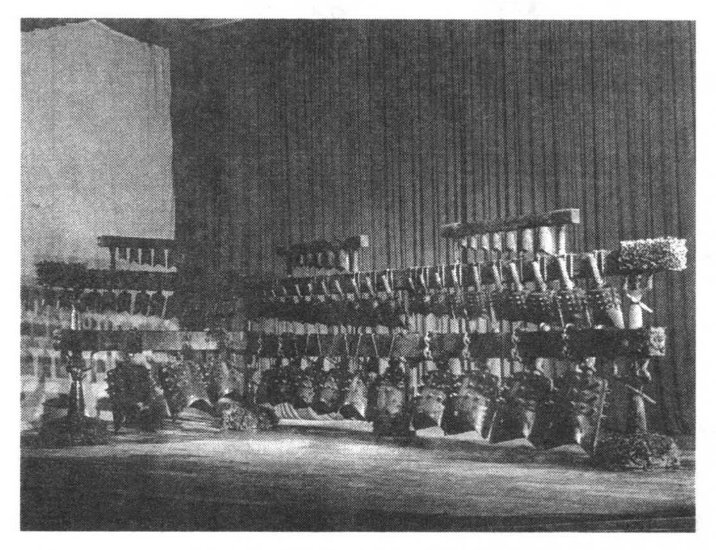


图 2.4.1　1978 年在湖北随县(今随州市)曾侯乙墓出土的公元前 5 世纪曾侯乙编钟。最大的钟高 153.4 cm,重 203.6 kg;最小的钟高 20.4 cm,重 2.4 kg。

(公元前 433 年)或稍后。也就是说,曾侯乙编钟大约铸于公元前 5 世纪。与礼钟不同,乐钟的横截面形如杏仁,见图 2.4.2。沈括曾说乐钟形为合瓦式[15]。这组钟不呈中心轴对称,而呈平面对称。

现代声学指出,钟的音响现象非常复杂。人们知道,呈现

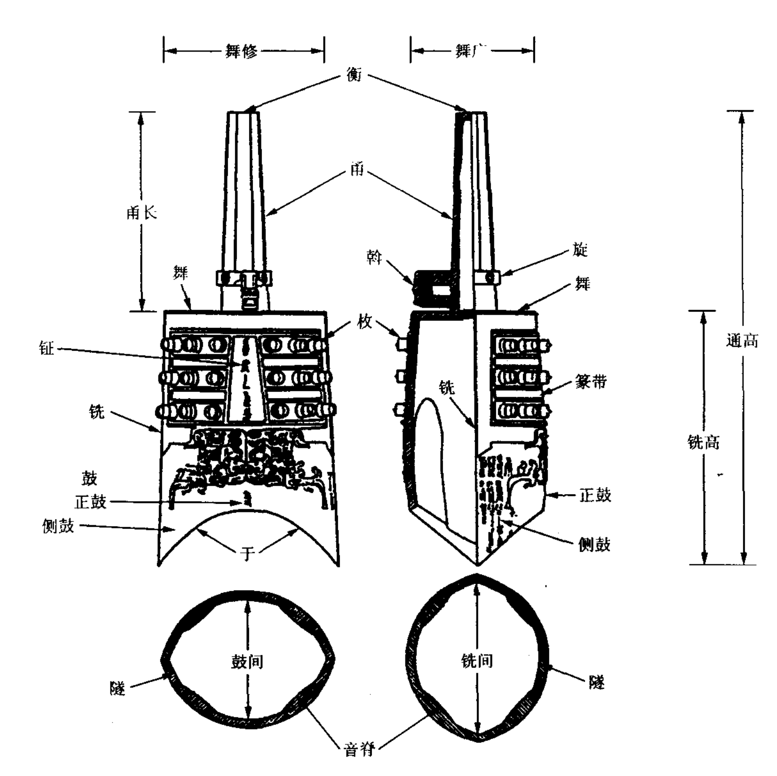


图2.4.2 甬钟形状和技术术语的示意图。甬钟是古代乐钟的类型之一,具有合瓦形结构。

中心轴对称的钟,由于其每周圈上的任何一点都是等势敲点,只能发一种声音。单音钟振动频率与钟壁厚度 t 和钟开口端圆形横截面孔径 d 成反比。由于钟的质量 m 和厚度 t 都与孔径 d 成正比,因而钟振动频率 f 与钟的孔径 d 成反比:

$$f \propto d^{-\delta}$$

这里的指数 δ 取决于钟的特性。合瓦形编钟的情况更为复杂,因为合瓦钟的截面不再能以一个直径而确定。但是,与

钟的质量相关,频率仍然有个类似的曲线递减关系。出土的编钟正具有这种递减关系[16]。

所有的编钟都有两个呈镜像对称的对称面。其中包含铣线的一个是主对称面(见图 2.4.2),也正是连结钟两部分的平面,构成一个合瓦形[17]。另一个是次对称面,对切主对称面。这样一种几何安排,建造了不等价的振动打击区域,编钟可以调节成发出两个截然不同的打击音。这样的设计同时也导致了沿着钟连结线的导数的不连续性。这样一种不连续性,连同钟的几何形状,使编钟的声音比中心对称轴钟的声音衰减得更快,便于音乐演奏。

古代中国音律学家利用合瓦形钟的这些音响性质,巧妙地设计、构造了便于演奏音乐的编钟。1978 年曾侯乙编钟的发现(见图 2.4.1),说明编钟铸造者在公元前 5 世纪已达到了非常高的水平。64 只钟的频率跨度达到 $5\frac{1}{2}$ 个八度[18]。每只钟有音阶中的两个音。正鼓和侧鼓发出的两个音通常相差三度。近年来,科学家对双音钟的振动情况,进行了全息摄影研究。如研究者所预料的那样,敲击两个不同的敲击点能激发起两类不同的振动模式[19]。图 2.4.3 重现了敲击曾侯乙编钟 M-3-1 钟和 M-3-2 钟的正鼓和侧鼓敲击点时,基本振动模式的激光全息图,由贾陇生等人测量[20]。较亮的部分表示结线,较暗的部分表示振幅。

制造具有双音性质、能构成和声音阶的编钟,确实是件了不起的发明。这不仅需要精密的铸造技术,而且需要先进的声学知识。一口钟一旦铸成,律的修改余地就很小,最后,只能在隧凹槽(见图 2.4.2)中用沙磨进行精细的校调。今天我们在钟的内壁可以发现不同程度的打磨痕迹。曾侯乙编钟的铸钟技术和声学知识,比《考工记》所描述的先进得多。一个

值得深究的问题是，这些丰富的音响实践知识，在多大的程度上是建立在理论的认知上的。

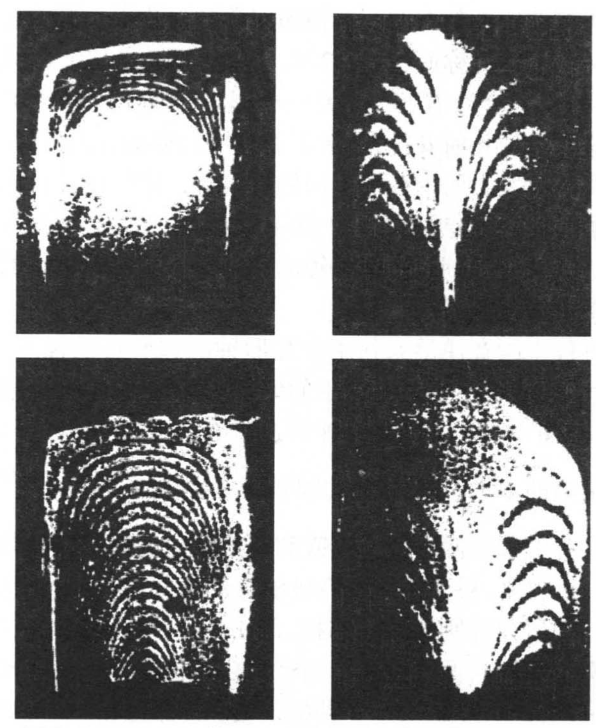


图 2.4.3 上图为曾侯乙编钟中层三排一号（M-3-1）钟的基本振动模式的全息摄影图，下图为中层三排二号（M-3-2）钟的基本振动模式的全息摄影图，左图均为敲击正鼓击点，右图均为敲击侧鼓击点，由贾陇生等测量。

3 音乐声学

人们生活在充满声波的自然环境中，对于音响的感知和体验，出于自然和本能。最早激起人们兴趣的，就是音程的发现。几个独立的声音，同时发出或者先后发出，能愉悦人们的听觉。更微妙的还在于，并不是所有令人愉悦的声音，在同时演奏时都能使人获得愉悦感[1]，从而促使古人发现了协和音程。音律学上这个发现，是从美学角度而不是从物理标准去考虑的。音律学与美学相互交融，激发古人取得音律学上不同凡响的巨大进步。本章讨论中国人早期的音律学成就。

3.1 音乐声学萌芽阶段

音乐的产生，一定是远在发现音阶之前，只是我们无从知晓它的发展过程。大多数古代音乐的重要信息，来自出土的古代乐器。中国文明现存最早的乐器，可以追溯到新石器时代，譬如公元前 6000 年河姆渡文化的骨哨[2]和公元前 5000 年仰韶文化的陶埙[3]。

考古发现中最有意义的乐器无疑是七孔骨笛，它用禽骨制成，1987 年在河南省舞阳县贾湖地区出土[4]。用碳放射性元素含量测定时间，约为公元前 6000 年。第二舞阳文化层中共出土了十六支骨笛[5]。在这十六支骨笛中，仅存标号为 M282:20 的一支没有裂缝，保存完好，可以发音。除了七个指孔外，骨笛还有开端两个孔和一个位于七个指孔正上方的小

孔(见图3.1.1)。骨笛长22.2 cm。正是这些极为罕见的保持发音能力的出土乐器,才使后人了解到史前音阶成就的宝贵信息。

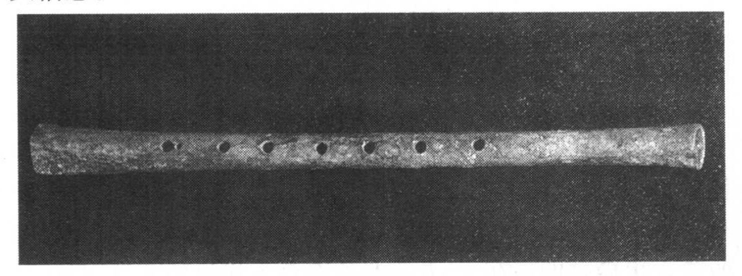


图3.1.1　1987年河南省舞阳县贾湖出土的公元前6000年的七孔骨笛(M282:20)。

实验表明,骨笛能发出八个音:七个指孔发七个音,另一个为封闭七个指孔后的管音。位于七个指孔正上方的小孔也有作用,可使第七音发出变音。测量知道,第一音和第七音之间近似八度。连同管音在内的八个音构成七声音阶[6]。这真是远古文明的一项杰出成就。新石器时代就出现了七声音阶,这个事实有力地驳斥了关于中国古代文明音律知识外来说的错误观点(见第4.1节)。

至于出土的商朝乐器,能保持发音功能的就比较多了。商代的青铜钟和石磬往往成组出土,大多是三个一组,后世称为编钟和编磬。由于侵蚀损坏,商代编钟的音已变质,不如有些出土编磬的音质。图3.1.2展示一套三枚编磬,安阳殷墟出土,编磬铭文上具有律名[7]。

民族音乐研究所测量了这套编磬的频率[8],表3.1.1中列出实测频率和理论推算频率作一比较[9]。假定"永启"律948.6赫兹为已知,分别用大二度$\frac{8}{9}$和纯四度$\frac{3}{4}$,求得理论频

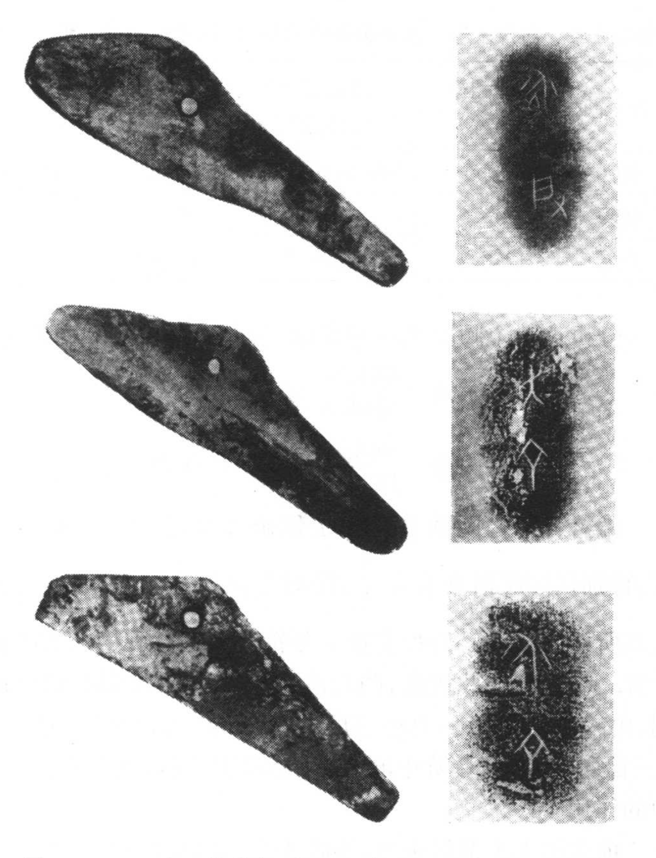


图3.1.2　一套三枚编磬,安阳殷墟出土,编磬铭文上分别有律名"永启"、"永余"和"夭余"。

率1067.2赫兹和1264.8赫兹。石磬音程的排列,与用《管子》上下五度相生法推导的商调式和徵调式前三个音十分贴近(见第3.3节)[10]。

表 3.1.1　商代一套三枚编磬测定频率,与理论推测频率值的比较

音 名	实测频率（赫兹）	理论频率（赫兹）	"永启"律—调式	
			商调式	徵调式
永启	948.6	948.6(给定值)	商(re)	徵(sol)
永余	1046.5	1067.2	角(mi)	羽(la)
夭余	1278.7	1264.8	徵(sol)	宫(do)

分析这三个频率之间的音程,与大二度和纯四度相比较:

$$永启—永余\quad \frac{948.6}{1046.5}=\frac{8}{9}+0.018,$$

$$永启—夭余\quad \frac{948.6}{1278.7}=\frac{3}{4}-0.008。$$

编磬各律之间的音程测定值确实接近于大二度和纯四度,特别是四度谐和音率$\frac{3}{4}$,绝对差仅仅为0.008,不是普通人耳所能分辨的。音程安排十分符合商调式和徵调式的前三个音。吻合到如此程度,凸现出古代中国在商朝时就已认识到,由一个全音和一个小三度所构成的"三音列"。事实上,"三音列"在五声音阶中的作用,类似于"四音列"在七声音阶中的作用[11]。

前文第1.1节讨论过,不晚于公元前6世纪,古人已经有调音用的十二律。按乐师州鸠的说法,在六律中插入六个称作为六间的间隙律,可得到十二律。值得注意的是,这些律名都是双字名。《国语》记载州鸠说,先由神瞽确定三个中音,接着均分三个中音为六律,最后完成十二律。我们完全有理由推测,州鸠所提到的三律,与图3.1.2和表3.1.1所示石磬数据为例的"三音列"有某种对应关系。而且,石磬铭文上三个律名也都是双字名。

陶埙首次出现在大约公元前5000年的新石器时代。到商代晚期,已经发展成为重要的旋律乐器。出土的陶埙标本,似乎随着制作年代的推移,音孔也逐渐增加。河南辉县琉璃阁商代晚期殷墓中出土的一大二小三只陶埙,大埙吹口破裂,一只小埙残损,但还有一只小埙保存完好,见图3.1.3。这只小埙呈平底尖顶圆丘形。顶端有一吹口,埙体前后各有二、三个指孔,共五孔。根据民族音乐研究所的测试,这只小埙可发十一个高度不同的音。图3.1.3中的五线谱列出所测量的十一个音高。这些不是等音程音,它们在五线谱上的位置标

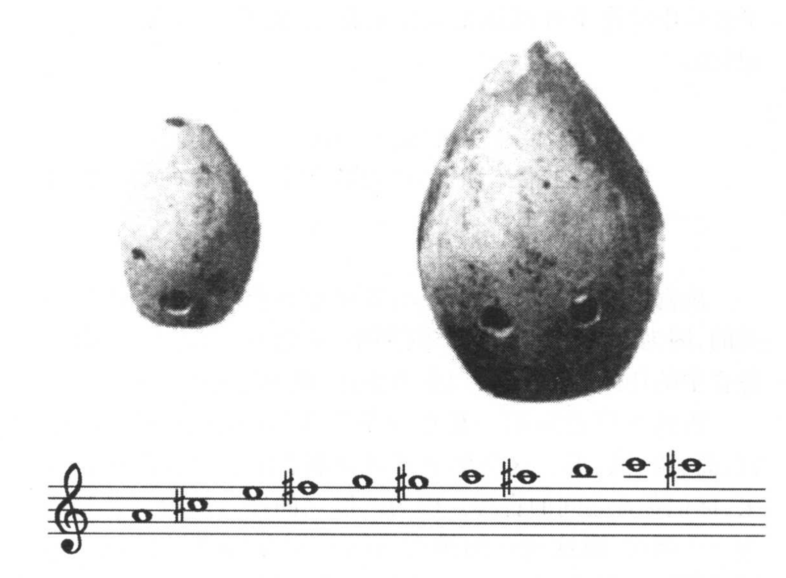


图3.1.3 河南辉县琉璃阁殷墓出土的两只陶埙,小的一只(高4.3 cm,最大孔径3.1 cm)有五个指孔,一侧两个,另一侧三个,大的一只(高7.3 cm,最大孔径5.1 cm)吹口破裂。五线谱列出民族音乐研究所测小埙十一个音高频率的近似位置。

记着近似的频率。频率及相应之间的绝对偏差并不明显,因为十一个音的测定频率并没有与上述结论同时发表。埙音阶中一个有意义的发现,就是半音音程。事实上,在这十一个所测的音中,已出现七个相连半音。这似乎表明,商代晚期音乐家也许有了十二律的初步概念。

3.2 律的标准化和旋宫原理

旋宫原理是古代中国重要的音乐理论,按照这个原理,一个音阶中的每个音都能轮流作主音,生成相应的调式。《礼记》说:

> 五声、六律、十二管,旋相为宫也。
> 【释文:五音音阶、六律音阶和十二管律的音阶中每一个音轮流作主音。】

旋宫原理来自这样的认识:音阶中各音之间的音程是相关的,因为这些比率与标准律(频率)的绝对值无关[12]。因此,各音中的任何一个,都可以作为主音,成为起始的最低阶[13]。

古代五声音阶用一组单音节字表达,以升序排列,即:宫、商、角、徵、羽。这些单字音名分别表示五声音阶各音音级,标记各音之间的音程。因为八度之间律音的每一排列成为一个调式,而这调式的排列均以其主音(最低律)相对而定,逐渐地,调式就冠以主音名而加以识别。在五声音阶中,照旋宫原理可辨别五个不同的调式,相当于每一个律音轮流作主音的五个不同排列。例如,商调式是一个以商音作为主音的律音排列。公元前5世纪,甚至可能更早,古代中国就已导出一个可计算特定调式音阶中各律音的方法(见第

3.3 节)。

除了相对音阶的导出,古代中国也很早就着重绝对律音阶的制定。早在公元前6世纪,十二律就用来调节乐音。因为每个律能用来定基音之律,调式种类因律数的增加而进一步扩展。旋宫原理的发现,促使人们进一步认识律调的多样性。孟轲(公元前372~前289年)的《孟子·离娄》就反映了这种观念:

既竭耳力焉,继之以六律,正五音,不可胜用也[14]。

【释文:如要竭尽耳之听觉,可进一步以六律调正五声音阶,

(由此得出的多样律调,)并非容易穷竭它们的用途。】

周代已出现了十二律的名称(见第1.1节),那时的音律学家已经拥有统一的律调术语系统。公元前120年的《淮南子》,明确讨论五声音阶以十二律调所得出律调的多样性:

一律而生五音,十二律而为六十音。

【释文:一个律音可派生出五种调式。十二个律音构成六十个调式。】

近代考古发现表明,周代各国曾出现过平行的律名系统(即同宫系统)[15],然而律调术语系统的原则保持不变。例如黄钟—宫和太簇—角,就分别指黄钟律为基律的宫调式和太簇律为基律的角调式。

律的标准化之所以很早在古代中国实现,可能源于古人为了充实音乐的色彩,喜爱把不同乐器放在一起演奏。《诗经》明确记载,中国文明中很早就有人同时演奏不同种类的

乐器。这个措施无疑使古人发现，要做到这一点，必须事先协调各种乐器的音律。这就促进了古人对标准化律的认识和兴趣。

测量出土的商代至今尚有发音功能的不同乐器，发现有律音在可容频率误差内几乎相同，说明早在商代就有标准化律的倾向[16]。《尚书·舜典》第一个提到律的标准化(见第1.1节)。曾侯乙编钟的发现和出土，提供了古代标准律相当具体的频率信息。值得注意的是曾侯乙编钟中上层2排6号的钮钟。此钟的商音，有铭文标明是"黄钟之宫"，测定此钟我们知道，公元前5世纪黄钟律的相应频率，大约是410.1赫兹[17]。

除律钟之外，中国古代确定标准律的主要器具也许是律管。1986年，湖北江陵雨台山的战国时期楚墓M21中，出土了几支律管残段[18]。律管用竹子去节制成，长度、孔径各不相同。多数已经破裂，但尚有四支的铭文可读[19]。现存铭文如下：

M21：17－1　定新(新)钟之宫为浊穆□，
坪皇角为定吝(文)王商□。

【释文：确定(新)钟律的宫音为较低的穆[钟]律的□，
坪皇律的角确定为文(吝)王律的商□。】

M21：17－2　□姑佬(洗)之宫为浊吝(文)王䍙(羽)为浊□。

【释文：□姑洗律的基音宫对应于较低文(䍙)王律的羽，较低的□。】

M21：17－3　□之宫为浊兽钟䍙(羽)□。

【释文:□的基音对应于较低的兽钟律的羽□。】

M21：17－4　□为浊穆钟□。
【释文:□对应于较低穆钟律的□。】

这些铭文记载了律名,还把赋予律的实施称为“定”。律管铭文上所有律名:新(新)钟、穆钟、坪皇、文王(吝王,吝王)、姑洗和兽钟,都可以由出土的曾侯乙编钟和编磬上所说律名鉴别。

这些律管是现存出土最早的律管。表3.2.1记录四支律管残余部分的尺寸。可以见到其中有两支可测孔径的律管,但遗憾的是,这两支的长度不能确定,因此无法进一步考察其频率,以便直接与曾侯乙编钟频率比较。

表3.2.1　出土楚律管名称与尺寸

编号	楚律管的律名	律管外径	律管内径	残存律管长度
M21:17－1	新钟	0.9 cm	0.6 cm	10.9 cm
M21:17－2	姑洗	1.0 cm	0.7 cm	13.3 cm
M21:17－3	－	－	－	6.2 cm
M21:17－4	－	－	－	5.9 cm

1986年在湖北江陵雨台山的战国时期楚墓M21中出土。

3.3　五声音阶的推算

现存最早推算五声音阶的记载,保存在《管子·地员》中,原文如下:

凡将起五音,凡首,先主一而三之,四开以合九九。
以是生黄钟小素之首,以成宫;

三分而益之以一,为百有八,为徵;

不无有三而去其乘,适足以是生商;

有三分而复于其所,以是生羽;

有三分而去其乘,以是生角[20]。

【释文:要以数理步骤推算五音,首先取主作为单位一,

乘以3,它的四次幂为9×9(即81),

作为黄钟律起算最小数("小数[素]之首"),定为宫音。

把此数[即81]增加三分之一,得108,为徵音。

把所得数[即108]减去三分之一,得[数72],足以生商音。

再返回其数[即72]的三分之一,得[数96],以生羽音。

再从所得数[即96]减去三分之一,得[数64],以生角音。】

用现代数学符号表示,五音算法为:

$(1\times3)^4=9\times9=81$ 约定为宫音,

$81\left(1+\frac{1}{3}\right)=108$ 得徵音,

$108\left(1-\frac{1}{3}\right)=72$ 得商音,

$72\left(1+\frac{1}{3}\right)=96$ 得羽音,

$96\left(1-\frac{1}{3}\right)=64$ 得角音。

首先设置起算数81,定为宫音,随后,分别利用 $\left(1+\frac{1}{3}\right)$ 和

$\left(1-\frac{1}{3}\right)$ 两个因数，算出图 3.3.1 中其他四音。为表达简便起见，图 3.3.1 中的 $\left(1+\frac{1}{3}\right)$ 和 $\left(1-\frac{1}{3}\right)$ 分别改写成 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$。

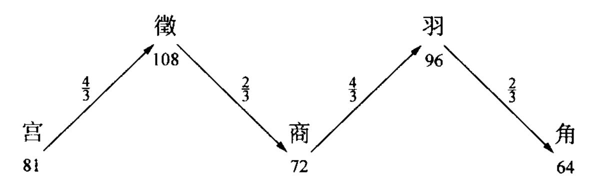


图 3.3.1 《管子·地员》所载推算徵调式五声音阶生律过程的示意图。

由于两律音之间的音程是以比率所定，以上《管子》推算的数据，所表达的音阶，与起算数 81 无关。《管子》的推算之所以用 81 作起算数，只在于避免非整数，原文清楚说明 81 是 3 的四次幂。由图 3.3.1 可见，整个计算过程中，四次相除都除以 3，数 81 是能被 3 整除四次的最小整数。

数据表明音阶五个音中，徵音最低，以徵音之数计算各律音之音程，求得徵调式五声音阶。它们的音程结构由下列和声级数组成：

徵	1	基音
羽	$\frac{8}{9}$	大二度
宫	$\frac{3}{4}$	纯四度
商	$\frac{2}{3}$	纯五度
角	$\frac{16}{27}$（约等于 $\frac{3}{5}$）	大六度

我们看到，这组比率与纯律谐率完全一致，只有大六度是个例外[21]。

本节译者附注：

“音阶”和“调”两个名词，含义稍有不同。音阶是照音的高低顺序排列的一列音，其中占主导地位的主音，通常放在音阶的开头。调则是音阶中各音在歌曲、乐曲受主音支配而进行时，音的相互关系。调这个名词还有另外的意义，即指主音的高度。例如，C 调大音阶中的调字，指大音阶的主音是 c 音。

我国的民族调式，是以五声音阶为基础所组成。五声音阶中的音，叫正音。正音有宫、商、角、徵、羽五个音。这五个正音都可以作为调式中的主音。用五声音阶可形成五种不同的五声调式。用什么音作主音，就叫什么调式，例如宫调式、羽调式。

主音是调式的中心，其一，它反复出现而处于突出地位；其二，其他调式音围绕主音；其三，通过上、下五度音对主音的倾向，支持和突出主音；其四，在重要拍位上加以强调，特别是将其作为全曲的终结音时。

由于五声调式的五个音都可以作为主音，不同的主音可以构成不同的五声调式，因此五声调式有五种。如以宫为主音叫做五声宫调式，以徵为主音叫做五声徵调式，其他依此类推。

五声调式由两个相同或不同的三音组结合而成。宫角两音与主音的音程关系最能说明五声调式的特征：

(1) 宫调式：由两个不同的三音组结合而成。它的特征是主音宫与上方角的关系是大三度。

(2) 徵调式：由两个相同的三音组结合而成。它的特征是主音徵与上方宫和角的关系是纯四度和大六度。

(3) 商调式：由两个不同的三音组结合而成。它的特征是主音商与上方角和宫的关系是大二度和小七度。

(4) 羽调式：由两个相同的三音组结合而成。它的特征是主音羽与上方宫和角的关系是小三度和纯五度。

(5) 角调式：由两个不同的三音组结合而成。它的特征是主音角与上方宫的关系是小六度。

3.4 上下相生原理

图 3.3.1 显示出《管子》五声音阶推算法的相生途径，是由上生和下生两个步骤所构成。这两个步骤的处理法，是把弦长或者乘以$\frac{4}{3}$[即 $(1+\frac{1}{3})$]，数值上升，向上；或者乘以$\frac{2}{3}$[即$(1-\frac{1}{3})$]，数值下降，向下。这两个步骤可用现代记号表示为图 3.4.1。值得注意的是用$\frac{2}{3}$下生，得出纯五度，相当于减少振动弦长度的三分之一[22]。用$\frac{4}{3}$上生，也得出纯五度，但低了八度，因为振动弦长度加上了三分之一后，相当于先削减原弦长的三分之一，再把余下部分长度增加一倍[23]。这正说明，从 X 音下生出的 Y_1 音（见图 3.4.1），也可以由另一条生律途径从同一个 X 音生出，那就是先上生出 Y 音，再下降一个八度而得到。因此，从同一个 X 音上生或下生出的 Y 和 Y_1，是两个相差一个八度的纯五度。

由此可见，《管子》五声音阶推算法，利用纯五度作为生律音程，是一个五度相生法，用上生或下生两个不同步骤推生律音，这两个步骤的使用在于选择所生律的八度范围，操纵这

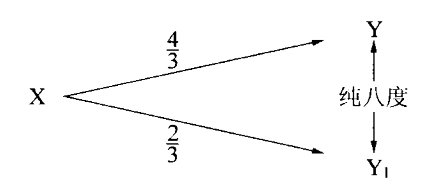


图 3.4.1　上下五度相生法示意图。

种选择的正是上下相生原理。也就是说,用纯五度来导生所有的律音,在必要时,用纯八度[24]来保证所生律音回到同一个八度内。由此,上下相生原理确保所得音阶的各个律音,最终定位于同一个八度内[25]。此法用的是谐率纯五度$\frac{2}{3}$和纯八度$\frac{1}{2}$,符合谐率音响的条件。

在实质上,《管子》所载的五声音阶推算法,就是《吕氏春秋》所载的三分损益相生法(见第3.5.1节),也就是当今通称的上下五度相生法。

值得注意的是,上下五度相生法是一个一般性方法,能导生同一音阶的不同调式,或不同长度的音阶。现举一例,以此法推导商调式五声音阶。商调式有五个音,以商音开始向上展开八度,即商、角、徵、羽、宫、商。按《管子》法,从宫音[26]起算,要连续施行两次上生,才得到较低的商音[27]。第二次上生是必不可少的,因为如果改用下生,从第一步得到的徵音($81 \times \frac{4}{3} = 108$)去下生出商音[28],会比宫音[29]高,不得不降低一个八度[30]。现在一步到位,改成直接第二次上生而实现[31],见图3.4.2。

商调式五声音阶中的和声级数是:

商	1	基音
角	$\frac{8}{9}$	大二度
徵	$\frac{3}{4}$	纯四度
羽	$\frac{2}{3}$	纯五度
宫	$\frac{9}{16}$(约等于$\frac{5}{9}$)	小七度

这组比率与纯律谐率完全一致,只有小七度数据除外[32]。

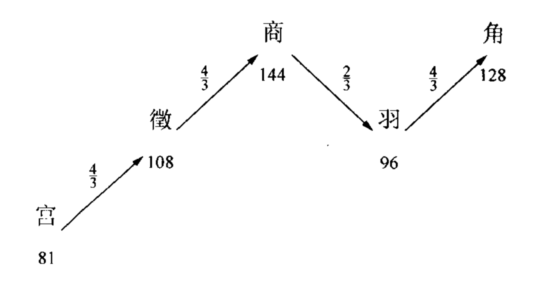


图3.4.2 《管子·地员》所载五声音阶计算法，应用在推算商调式五声音阶生律过程的示意图。

商调式与《管子》法徵调式只相差一个音，它没有大六度，只有小七度。其他五度音阶的调式都可以直接用此法推算形成。这恰恰说明了上下相生原理的功能和三分损益法的一般性。现存史料表明，中国古代音乐早已广泛使用所有的五个五声调式。

3.5 半音音阶的推算

古代中国流传至今有两种半音音阶，一是二比律半音音阶，另一是纯律半音音阶。二比律的推导出现于《吕氏春秋》，即世称的三分损益法。古著上虽没有纯律的推导记载，但推导纯律的角—曾法可由在曾侯乙钮钟铭文上推得（见第3.5.2节）。本节将分别讨论这两种半音音阶的特征和推导方法。

3.5.1 三分损益法

《吕氏春秋》记载用三分损益法导生半音音阶的过程出现于《音律》篇，原文如下：

黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，
姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，
夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。
三分所生益之一分以上生，
三分所生去其一分以下生。
黄钟，大吕，太簇，夹钟，姑洗，仲吕，蕤宾，为上，
林钟，夷则，南吕，无射，应钟，为下。
【释文：从黄钟律生出林钟律，
从林钟律生出太簇律，从太簇律生出南吕律，
从南吕律生出姑洗律，从姑洗律生出应钟律，
从应钟律生出蕤宾律，从蕤宾律生出大吕律，
从大吕律生出夷则律，从夷则律生出夹钟律，
从夹钟律生出无射律，从无射律生出仲吕律。
从原值中加上三分之一，得到上生，
从原值中减去三分之一，得到下生，
黄钟，大吕，太簇，夹钟，姑洗，仲吕，蕤宾，由上生而得，
林钟，夷则，南吕，无射，应钟，由下生而得。】

以上《吕氏春秋》描述十二个律的生律过程，可表示为图3.5.1。

	F'	C	G	D	A	E	B	$F^{\#}$	$C^{\#}$	$G^{\#}$	$D^{\#}$	$A^{\#}$	F
		黄钟	林钟	太簇	南吕	姑洗	应钟	蕤宾	大吕	夷则	夹钟	无射	仲吕
	$\frac{243}{4}$	81	54	72	48	64	$\frac{128}{3}$	$\frac{512}{9}$	$\frac{2048}{27}$	$\frac{4096}{81}$	$\frac{16384}{243}$	$\frac{32768}{729}$	$\frac{131072}{2187}$
比例	$\frac{4}{3}\nearrow$	$\frac{2}{3}\searrow$	$\frac{4}{3}\nearrow$	$\frac{2}{3}\searrow$	$\frac{4}{3}\nearrow$	$\frac{2}{3}\searrow$	$\frac{4}{3}\nearrow$	$\frac{4}{3}\nearrow$	$\frac{2}{3}\searrow$	$\frac{4}{3}\nearrow$	$\frac{2}{3}\searrow$	$\frac{4}{3}\nearrow$	

图3.5.1 《吕氏春秋》三分损益相生法导生半音音阶的生律过程。

显然，图3.5.1与图3.3.1和图3.4.2十分相似，同样由

上生和下生两个步骤组合而成。这个观察进一步确定了第3.4节分析上下五度相生原理的结论,表明《吕氏春秋》所载三分损益相生法,实质上就是《管子》所载五声音阶推算法。只是《管子》所考虑的,仅仅是五声音阶,在八度范围内只导生五个音。而《吕氏春秋》考虑的则是半音音阶,在八度范围内导生十二个半音。

值得注意,《吕氏春秋》给上生和下生两个步骤作出明确的定量叙述:

> 三分所生益之一分以上生,
> 三分所生去其一分以下生。
> 【释文:从原值中加上三分之一,得到上生,
> 从原值中减去三分之一,得到下生。】

这也说明"上生"和"下生"术语的来源,及其与世称三分损益法"损"和"益"的关系。

为比较细节,我们把《管子》音阶推算中宫音的起算数81,作为黄钟律的起算数据,从而把《吕氏春秋》三分损益推算出的数据与《管子》的数据统一起来。图3.5.1中的数据是以此为基础而推算得的。这些数据的值相应于十二个律的顺序,为读者的方便,在图3.5.1中把黄钟律位任意指定为C律音位,并列出半音音列符号:C,$C^{\#}$,D,$D^{\#}$,E,F,$F^{\#}$,G,$G^{\#}$,A,$A^{\#}$,B,C_1,以利于十二律排位的辨认[33]。

使用图3.5.1的数据,能方便地计算出半音音列中相邻两音之间的音程(见图3.5.2)。根据计算,这些数据所表达的半音音阶有大半音和小半音两种半音,例如:

$$\frac{\text{仲吕 F}}{\text{姑洗 E}}=\frac{\frac{131072}{2187}}{64}=\frac{2048}{2187}\quad(\text{大半音})$$

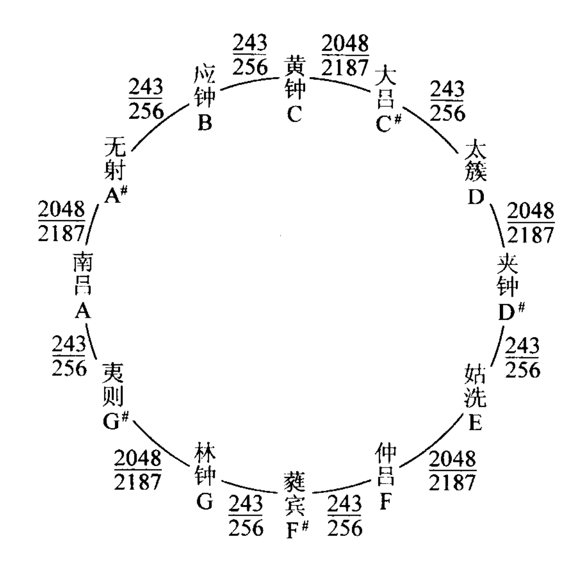


图 3.5.2　二比律半音音阶八度圆的半音结构，采用《吕氏春秋》三分损益相生法。

$$\frac{\text{蕤宾 F}^{\#}}{\text{仲吕 F}} = \frac{\dfrac{512}{9}}{\dfrac{131072}{2187}} = \frac{243}{256} \quad (\text{小半音})$$

大半音和小半音结合成大全音：

$$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right) = \left(\frac{3^5}{2^8}\right)\left(\frac{2^{11}}{3^7}\right) = \frac{8}{9} \qquad (3.1)$$

这个半音和全音的关系，是构制《吕氏春秋》二比律半音音阶的一个重要基础。

如图 3.5.2 所示，半音音阶的八度圆是由七个小半音和五个大半音组成，满足下列八度与半音的数据关系：

$$\left(\frac{243}{256}\right)^7\left(\frac{2048}{2187}\right)^5 = \left(\frac{3^5}{2^8}\right)^7\left(\frac{2^{11}}{3^7}\right)^5 = \frac{1}{2} \qquad (3.2)$$

这种关系证实，三分损益法所导生的半音音阶是二比律

半音音阶，由两种不同的半音所组成，因而，二比律的旋宫转调功能相当灵活，仅次于等比律（见第 5 章）。

以黄钟律为基音律，就可用图 3.5.1 的数据计算出与各律音的比率，得出黄钟律半音音阶的音程。表 3.5.1 列出十二律每一律的半音音阶的相应音程结构。

表 3.5.1　十二律每一律半音音阶的音程结构与纯律的比较

律调 音程	黄钟 C	大吕 $C^\#$	太簇 D	夹钟 $D^\#$	姑洗 E	仲吕 F	蕤宾 $F^\#$	林钟 G	夷则 $G^\#$	南吕 A	无射 $A^\#$	应钟 B	纯律
基音	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
小二度	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{15}{16}$
大二度	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
小三度	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{5}{6}$
大三度	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{4}{5}$
纯四度	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
增四度	$\frac{512}{729}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{32}{45}$
纯五度	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{177147}{262144}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
小六度	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{5}{8}$
大六度	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{3}{5}$
小七度	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{9}$
大七度	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{8}{15}$
八度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

为加以比较，表最右一列列出纯律的音程结构（关于与纯律相关的分析，见第 4.5.1 节）。显然，《吕氏春秋》二比律

律制中掺有不同程度的纯律特性,多数音阶中保留了纯律的大二度、纯四度和纯五度。

3.5.2 角—曾法

古著虽然没有纯律推导的记载,但推导纯律的角—曾法,可根据曾侯乙钮钟铭文中的音名和音程结构加以复原。因为曾侯乙编钟(见图2.4.1)上二组和上三组钮钟铭文中的双音音名,记载着另一种半音音阶,它的音程近似于纯律。由音名和音程得知,角—曾法的生律过程分成两步,第一步用上下五度相生法导生徵、羽、宫和商四个核心音,第二步再用角(jué)音程和曾(zēng)音程,从核心音导生其他八个音[34]。下面分两方面介绍:首先探讨钮钟音名的编排和音程结构与相对半音音阶的关系(见图3.5.3),然后讨论钮钟的测定频率(见表3.5.2)以求角音程和曾音程。

曾侯乙编钟上二组和上三组双音钮钟的编排位置,如图3.5.3所示。可以看到,相应于钮钟编排位置各音,呈现出半音结构,从左到右,从下到上,升序排列,略大于两个八度[35]。为方便起见,我们利用近代音乐界所采用半音音列符号,取C由最低的宫音作音位排列,以助音位辨认。

音名来自钟铭文,最低的宫音任意指定为C,以助十二半音排列的辨认。

比较钮钟排列与半音结构可以看到,所有钮钟音构成半音音阶系统,因为钮钟上的音名本身反映出角—曾法导生的重要线索。音名中有四个音:徵、羽、宫和商,属于五声音阶,其他音名都由此四个音伴上角字或曾字而构成。相应名称如下:

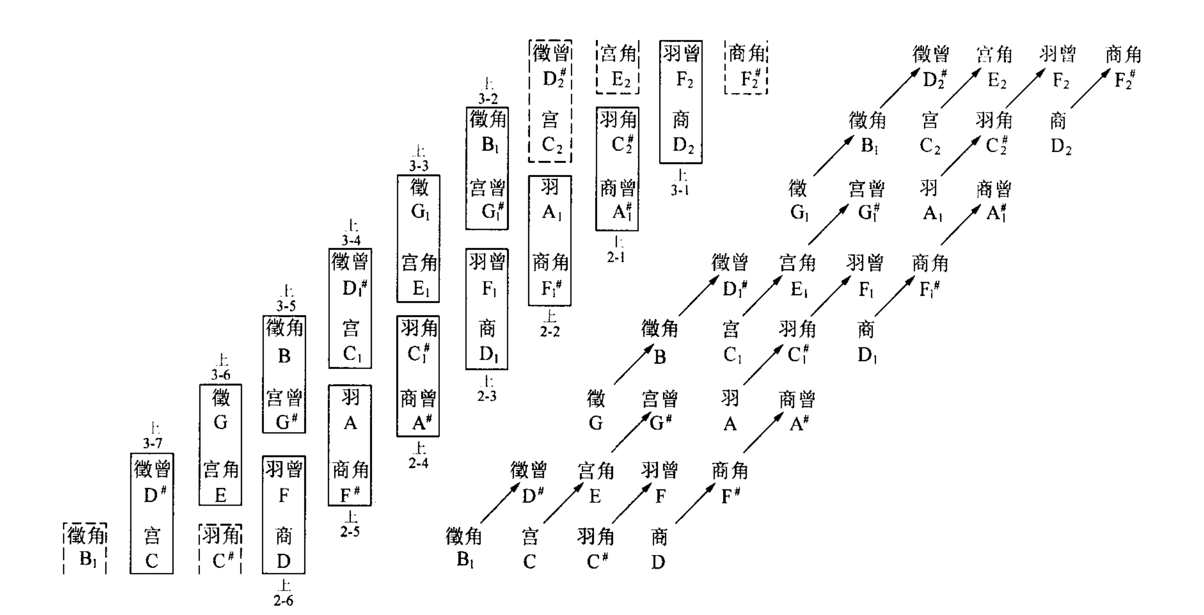


图 3.5.3　左图: 曾侯乙编钟(公元前 5 世纪)上二组和上三组双音钮钟的编排位置。右图: 半音音阶生律次序示意图。

徵	徵角	徵曾
羽	羽角	羽曾
宫	宫角	宫曾
商	商角	商曾

这个关系似乎表明，徵、羽、宫、商这四个五声音阶音，起着核心的功能，添加角音程和曾音程后，相应导出八个音。利用角音程的，以角字作音名后缀；利用曾音程的，以曾字作音名后缀。图3.5.3(右图)反映半音音阶的生律次序，与钟的实际排列位置(左图)相符[36]。如此，角—曾法轻松地导生整个半音音阶。这个方法与上下五度相生法的区别，在于只在导生徵、羽、宫、商四个核心音时使用五度音程，然后，用核心音加角音程，导生徵角、羽角、宫角、商角，从核心音加曾音程，导生徵曾、羽曾、宫曾、商曾。

要进一步探索角—曾法，首先要精确测定角音程和曾音程的数据。表3.5.2列出所测定十二半音的频率，表明角音程和曾音程分别对应于大三度和小六度。

利用《管子》和《吕氏春秋》的三分损益法，可以得到大三度$\frac{4}{5}$的两个近似值$\frac{64}{81}$或$\frac{6561}{8192}$，以及小六度$\frac{5}{8}$的两个近似值$\frac{81}{128}$或$\left(\frac{64}{81}\right)^2$。两两组合，得到四组可能值：

组一	角音程 $\cong\frac{64}{81}$	曾音程 $\cong\frac{81}{128}$
组二	角音程 $\cong\frac{64}{81}$	曾音程 $\cong\left(\frac{64}{81}\right)^2$
组三	角音程 $\cong\frac{6561}{8192}$	曾音程 $\cong\frac{81}{128}$
组四	角音程 $\cong\frac{6561}{8192}$	曾音程 $\cong\left(\frac{64}{81}\right)^2$

表3.5.2　曾侯乙编钟上二组和上三组双音钮钟正鼓、侧鼓的测定频率[37]

半音音列	钮钟音	第一个八度			第二个八度			第三个八度		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c
宫C	正鼓音(T-3-7,T-3-4)	362.2	365.1	364.1	728.5	731.7	729.8			
羽角C#	侧鼓音(T-2-4,T-2-1)				814.9	818.9	817.8	1668.9	1678.7	1673.8
商D	正鼓音(T-2-6,T-2-3,T-3-1)	407.7	410.1	409.0	818.7	822.7	820.6	1775.3	1781	1778.1
徵曾D#	侧鼓音(T-3-7,T-3-4)	443.8	446.6	446.2	885.6	890	889.2			
宫角E	正鼓音(T-3-6,T-3-3)	469.1	471.9	470.2	938.3	944	940.4			
羽曾F	侧鼓音(T-2-6,T-2-3,T-3-1)	497.3	500.5	501.2	979.3	998	996.6	2111.2	2117	2111.9
商角F#	正鼓音(T-2-5,T-2-2)	541.1	543.5	542.0	1094.7	1101	1097.4			
徵G	侧鼓音(T-3-6,T-3-3)	569.0	571.2	570.1	1134.6	1140	1138.8			
宫曾G#	正鼓音(T-3-5,T-3-2)	599.3	599.3	598.1	1237.3	1243	1236.5			
羽A	侧鼓音(T-2-5,T-2-2)	640.5	642.6	641.6	1300.4	1306.8	1305.6			
商曾A#	正鼓音(T-2-4,T-2-1)	681.3	683.5	681.0	1381.7	1390	1385.7			
徵角B	侧鼓音(T-3-5,T-3-2)	713.5	716.4	716.4	1442.0	1447	1446.7			

a. 1978年,北京文学艺术研究院音乐研究所测定的数据(见王湘 pp. 71~73)。b. 1979年,上海博物馆青铜器研究组与复旦大学物理系合作测定(见上海博物馆青铜器研究组,pp. 90~92)。c. 1980年,哈尔滨科学技术大学测定(见湖北省博物馆(3), vol. 1, pp. 110~115)。

这四组音程近似值可用来探索角—曾法,探索计算的结果显示在图3.5.4和图3.5.5。计算中徵、羽、宫、商四个核心音的数据,取自于《管子》五声音阶之推算。

值得提出,在这个探索性的计算中,角和曾两音程都用近似值,来自三分损益法。因此,从谐率音响的角度分析,我们

并不指望角—曾法,可导生比三分损益法更精确的半音音阶。不过,用这四组音程近似值,角—曾法应该可导生与三分损益相等或类似的半音音阶,除非角—曾法不是一个有效的半音音阶导生法。

图3.5.4显示角—曾法的具体推算步骤,图中数据的比率,给出用组一、组二近似值所导生之半音音阶的音程结构。

根据角—曾法,这四组音程近似值,可推算出四个半音音阶,图3.5.5显示这四个音阶的八度圆。不出所料[38],用组二数据生出的半音音阶和八度圆,与《吕氏春秋》法完全一致(见图3.5.2)。分析图3.5.5八度圆的半音结构,可以确定,除组二八度圆之外,组一和组三的八度圆,都是用五个大半音$\left(\frac{2048}{2187}\right)$和七个小半音$\left(\frac{243}{256}\right)$组成,与《吕氏春秋》二比律半音音阶等价[见式(3.2)和图3.5.2]。实际上,组一、组二、组三的三个八度圆是等势圆,可通过与圆面铅直中心轴的旋转,由一八度圆转变到另一八度圆。由此可证,这三个八度圆都属于《吕氏春秋》二比律律制系统。

以上应用角音程和曾音程近似值进行的探索,证实角—曾法的确是一个半音音阶导生法。现在我们用合乎谐率音响的大三度和小六度,探索角—曾法的生律功能。采用大三度谐率$\frac{4}{5}$和小六度谐率$\frac{5}{8}$,我们组合下列两组角音程和曾音程数据,来探验角—曾法:

$$\text{组五}\quad \text{角音程}=\frac{4}{5}\qquad \text{曾音程}=\frac{5}{8}$$

$$\text{组六}\quad \text{角音程}=\frac{4}{5}\qquad \text{曾音程}\cong\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

这里,组五中同时使用大三度$\frac{4}{5}$和小六度$\frac{5}{8}$谐率,组六只

角 $\frac{64}{81}$ 大三度

曾 $\left(\frac{81}{128}\right)$ 小六度

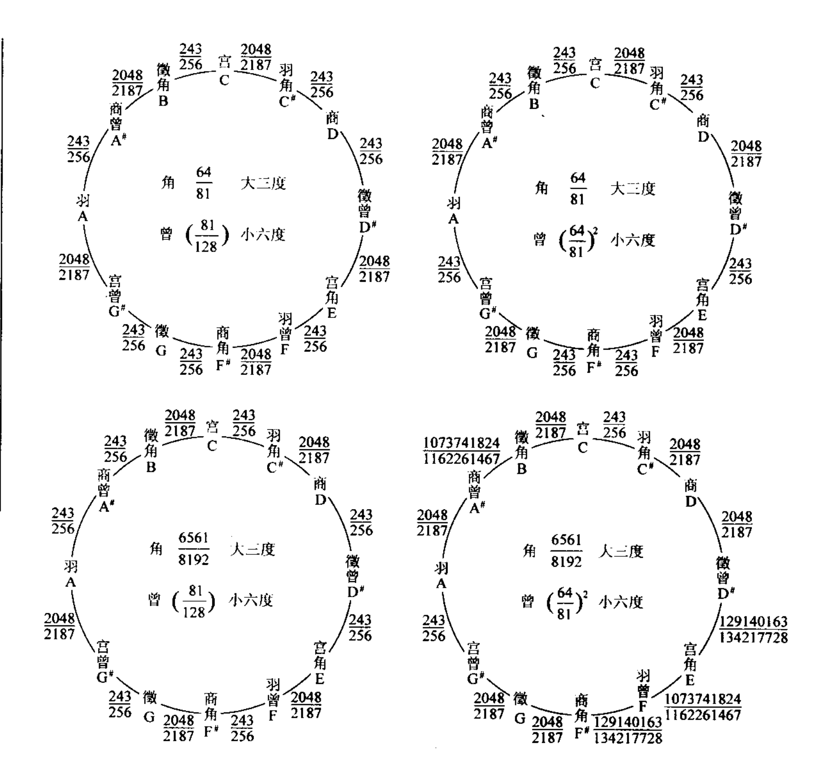
徵	宫	羽	商
徵曾$D_2^{\#}$ $\frac{2187}{64}$	宫角E_2 32	羽曾F_2 $\frac{243}{8}$	商角$F_2^{\#}$ $\frac{256}{9}$
徵角B_1 $\frac{128}{3}$	宫C_2 $\frac{81}{2}$	羽角$C_2^{\#}$ $\frac{1024}{27}$	商D_2 36
徵G_1 54	宫曾$G_1^{\#}$ $\frac{6561}{128}$	羽A_1 48	商曾$A_1^{\#}$ $\frac{729}{16}$
徵曾$D_1^{\#}$ $\frac{2187}{32}$	宫角E_1 64	羽曾F_1 $\frac{243}{4}$	商角$F_1^{\#}$ $\frac{512}{9}$
徵角B $\frac{256}{3}$	宫C_1 81	羽角$C_1^{\#}$ $\frac{2048}{27}$	商D_1 72
徵G 108	宫曾$G^{\#}$ $\frac{6561}{64}$	羽A 96	商曾$A^{\#}$ $\frac{729}{8}$
徵曾$D^{\#}$ $\frac{4374}{32}$	宫角E 128	羽曾F $\frac{243}{2}$	商角$F^{\#}$ $\frac{1024}{9}$
徵角B_1 $\frac{512}{3}$	宫C 162	羽角$C^{\#}$ $\frac{4096}{27}$	商D 144

角 $\frac{64}{81}$ 大三度

曾 $\left(\frac{64}{81}\right)^2$ 小六度

徵	宫	羽	商
徵曾$D_2^{\#}$ $\frac{8192}{243}$	宫角E_2 32	羽曾F_2 $\frac{65536}{2187}$	商角$F_2^{\#}$ $\frac{256}{9}$
徵角B_1 $\frac{128}{3}$	宫C_2 $\frac{81}{2}$	羽角$C_2^{\#}$ $\frac{1024}{27}$	商D_2 36
徵G_1 54	宫曾$G_1^{\#}$ $\frac{4096}{81}$	羽A_1 48	商曾$A_1^{\#}$ $\frac{32768}{729}$
徵曾$D_1^{\#}$ $\frac{16384}{243}$	宫角E_1 64	羽曾F_1 $\frac{131072}{2187}$	商角$F_1^{\#}$ $\frac{512}{9}$
徵角B $\frac{256}{3}$	宫C_1 81	羽角$C_1^{\#}$ $\frac{2048}{27}$	商D_1 72
徵G 108	宫曾$G^{\#}$ $\frac{8192}{81}$	羽A 96	商曾$A^{\#}$ $\frac{65536}{729}$
徵曾$D^{\#}$ $\frac{32768}{243}$	宫角E 128	羽曾F $\frac{262144}{2187}$	商角$F^{\#}$ $\frac{1024}{9}$
徵角B_1 $\frac{512}{3}$	宫C 162	羽角$C^{\#}$ $\frac{4096}{27}$	商D 144

图 3.5.4 角—曾法导生半音音阶生律次序示意图。（徵、羽、宫、商四个核心音的数据取自于《管子》上下五度相生法，角大三度和曾小六度用组一、组二音程近似值。）



3.5.5 角一曾法用角大三度和曾小六度四种组合近似值所导生之半音音阶的八度圆。（徵、羽、宫、商四个核心音的数据，取自于《管子》上下五度相生法。）

用大三度谐率$\frac{4}{5}$，小六度用近似值$\left(\frac{4}{5}\right)^2$。用组五、组六数据导生半音音阶，情况大不相同。角一曾法所导出的音阶是纯律半音音阶。计算步骤和结果显示于图 3.5.6 和图 3.5.7。

图 3.5.6 显示出角一曾法用组一、组二音程导生的推算步骤与具体数据。由这些数据计算所得半音音阶和八度圆

角 $\frac{4}{5}$ 大三度

曾 $\frac{5}{8}$ 小六度

徵	宫	羽	商
徵曾$D_2^{\#}$ $\frac{135}{4}$	宫角E_2 $\frac{162}{5}$	羽曾F_2 30	商角$F_2^{\#}$ $\frac{144}{5}$
徵角B_1 $\frac{216}{5}$	宫C_2 $\frac{81}{2}$	羽角$C_2^{\#}$ $\frac{192}{5}$	商D_2 36
徵G_1 54	宫曾$G_1^{\#}$ $\frac{405}{8}$	羽A_1 48	商曾$A_1^{\#}$ 45
徵曾$D_1^{\#}$ $\frac{135}{2}$	宫角E_1 $\frac{324}{5}$	羽曾F_1 60	商角$F_1^{\#}$ $\frac{288}{5}$
徵角B $\frac{432}{5}$	宫C_1 81	羽角$C_1^{\#}$ $\frac{384}{5}$	商D_1 72
徵G 108	宫曾$G^{\#}$ $\frac{405}{4}$	羽A 96	商曾$A^{\#}$ 90
徵曾$D^{\#}$ 135	宫角E $\frac{648}{5}$	羽曾F 120	商角$F^{\#}$ $\frac{576}{5}$
徵角B_1 $\frac{864}{5}$	宫C 162	羽角$C^{\#}$ $\frac{768}{5}$	商D 144

角 $\frac{4}{5}$ 大三度

曾 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 小六度

徵	宫	羽	商
徵曾$D_2^{\#}$ $\frac{864}{25}$	宫角E_2 $\frac{324}{10}$	羽曾F_2 $\frac{768}{25}$	商角$F_2^{\#}$ $\frac{144}{5}$
徵角B_1 $\frac{216}{5}$	宫C_2 $\frac{81}{2}$	羽角$C_2^{\#}$ $\frac{192}{5}$	商D_2 36
徵G_1 54	宫曾$G_1^{\#}$ $\frac{1296}{25}$	羽A_1 48	商曾$A_1^{\#}$ $\frac{1152}{25}$
徵曾$D_1^{\#}$ $\frac{1728}{25}$	宫角E_1 $\frac{324}{5}$	羽曾F_1 $\frac{1536}{25}$	商角$F_1^{\#}$ $\frac{288}{5}$
徵角B $\frac{432}{5}$	宫C_1 81	羽角$C_1^{\#}$ $\frac{384}{5}$	商D_1 72
徵G 108	宫曾$G^{\#}$ $\frac{2592}{25}$	羽A 96	商曾$A^{\#}$ $\frac{2304}{25}$
徵曾$D^{\#}$ $\frac{3456}{25}$	宫角E $\frac{648}{5}$	羽曾F $\frac{3072}{25}$	商角$F^{\#}$ $\frac{576}{5}$
徵角B_1 $\frac{864}{5}$	宫C 162	羽角$C^{\#}$ $\frac{768}{5}$	商D 144

图 3.5.6 角—曾法导生半音音阶生律次序示意图。(角大三度和曾小六度用组五、组六音程，徵、羽、宫、商四个核心音的数据取自于《管子》上下五度相生法。)

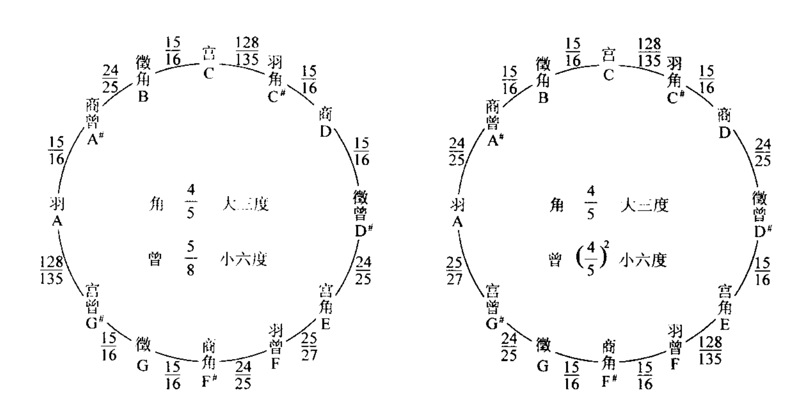


图 3.5.7　角—曾法用角大三度$\frac{4}{5}$和曾小六度$\frac{5}{8}$和其近似值$\left(\frac{4}{5}\right)^2$所导生之半音音阶的八度圆。(徵、羽、宫、商四个核心音的数据,取自于《管子》上下五度相生法。)

(见图 3.5.7),不再只含两种半音,而是含有四种半音:六个$\left(\frac{15}{16}\right)$、三个$\left(\frac{24}{25}\right)$、两个$\left(\frac{128}{135}\right)$和一个$\left(\frac{25}{27}\right)$,满足如下关系:

$$\left(\frac{15}{16}\right)^6\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{128}{135}\right)^2\left(\frac{25}{27}\right)=\frac{1}{2} \tag{3.3}$$

这种半音—八度的关系,确确实实构成了纯律的半音音阶。显然,与只有两种半音的《吕氏春秋》半音音阶相比[见式(3.2)和图 3.5.2],纯律音阶在旋宫转调上缺少灵活性,但是从听觉美感而言,纯律最悦耳。

式(3.3)的八度关系表明,凡是用组五、组六数据生出的半音音阶,都呈现纯律特性。既然纯律中每一音都可为基音,以计算各律音的音程,在表 3.5.3 列出组五八度圆各律半音音阶的音程。由表可见以徵音为基音的半音音阶与传统纯律所有和声音程能精确地吻合。

表 3.5.3　角—曾法用角大三度$\frac{4}{5}$、曾小六度$\frac{5}{8}$所导生之半音音阶的音程结构与传统纯律的比较

音程＼律调	宫 C	羽角 C#	商 D	徵角 D#	宫角 E	羽曾 F	商角 F#	徵 G	宫曾 G#	羽 A	商曾 A#	徵角 B	纯律
基音	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
小二度	$\frac{128}{135}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{25}{27}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{128}{135}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$
大二度	$\frac{8}{9}$	$\frac{225}{256}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{225}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
小三度	$\frac{5}{6}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{64}{75}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{64}{75}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{75}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
大三度	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{4}{5}$
纯四度	$\frac{20}{27}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{512}{675}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
增四度	$\frac{32}{45}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{32}{45}$
纯五度	$\frac{2}{3}$	$\frac{675}{1024}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
小六度	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$
大六度	$\frac{16}{27}$	$\frac{75}{128}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{75}{128}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{75}{128}$	$\frac{3}{5}$
小七度	$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{225}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{128}{225}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
大七度	$\frac{8}{15}$	$\frac{135}{256}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{27}{50}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{135}{256}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{8}{15}$
八度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

徵、羽、宫、商四个核心音的数据，取自于《管子》上下五度相生法。

分析组六八度圆，得出相同组五结果，证实角—曾法对曾音程用纯律小六度$\frac{5}{8}$或近似值小六度$\left(\frac{4}{5}\right)^2$并不严密，只要角音程用纯律大三度$\frac{4}{5}$。组五、组六所得半音音阶，都属于纯律律制系统。因此，图 3.5.7 的两个八度圆为等势圆，可通过

与圆面铅垂中心轴的旋转,由组五八度圆转变到组六八度圆。由图3.5.7可见,当组五八度圆的徵音随中心轴顺时针转到组六八度圆的徵角音,两个八度圆的半音音程排列就完全相同。由此而知,组六以徵角音为基音的半音音阶,与传统纯律所有和声音程也精确吻合。以上推算,证实角一曾法的确可能是古代导生纯律半音音阶的方法。

4 评论和评价

声学与天文学一样，是最早的两门自然学科，在中国文明中被列为正式学科，也是最早与数学建立了关系的学科。相关记载很早就收入了朝代史中的《律历志》[1]。“历”指历法天文，律指音律声学，可见声学享有与天文学并列的独特地位。从汉代起，许多官方的历史记录就在《律历志》这个标题下，合并记载了两个领域的内容。《二十四史》中，只有《史记》是个明显的例外，把律和历分别记载。

在整个历史长河中，声学与天文学的文字记载同样悠久、同样丰富。然而，对早期中国声学的研究，还遗留有大量问题尚待解决，声学研究远没有达到相应于早期天文学研究那样的学术水平。一些研究论文中充斥着没有理由的主张，不正确的日期，以及对中国音律学的误解。种种陈词滥调，诸如中国音乐单调无味、只有五音、缺乏半音和缺乏纯正八度概念等等，比比皆是，完全无助于研究水平的提高。除此之外，研究工作还存在着重大的纰漏。

李约瑟和鲁宾逊设问过：“早期中国思想家所认识的声音是什么?”他们自答称：

> 早期中国思想家观念中的声音，只不过是类似香味和颜色的一种活动形式[2]。

如此这般描述古代中国对声音的认识，只能暴露出多数

汉学家和科学史学家对古代中国声学的研究水平。客观地说,即使古代中国确实有人尝试过,把声音与香味、颜色进行主观联系,也不能把这种做法说成是中国人研究声音方法的全部,不能以它来代表中国古代声学家工作的性质。

李约瑟和鲁宾逊比较古代中国与古希腊的声学研究方法,作出如下阐述:

> 在声学上,就像在科学的许多分支上一样,中国方法与欧洲方法截然不同。古希腊是分析的(analytic),而古代中国是相关的(correlative)。[3]

这种概括性的结论需要商榷。事实上,有关中国古代物理声学方面的工作和记载,至今还没有人深入地研究过。在第4.1节和第4.2节中,我们可以看到,古代中国对于声音的研究是分析性的(analytical),不但尝试总结声音的抽象理论,而且注重探讨声音的物理属性,这与李约瑟和鲁宾逊的结论正好相反。

限于篇幅,我们无法评述研究古代中国声学方面的众多问题。本章中,只讨论其中几个主要问题。

4.1 古代中国声学的起源问题

中国声学的起源,是历来声学史界争论的一个焦点,古代中国在声学上的成就,是一个具有众多疑点的课题。本节将较为深入地考查和评论关于古代中国音律学起源的多种假说、论断和结论。

4.1.1 历史背景和钱德明的见解

1599年,当传教士利玛窦(Matteo Ricci,1552～1610)参

观南京文庙的祭祀仪式，初次听到中国的礼乐时，我们今天所谓的欧洲"古典音乐"尚不存在，维瓦尔第(Antonio Vivaldi，1675～1741)和巴赫(Johann Sebastian Bach，1685～1750)等古典音乐家尚未诞生。利玛窦在参观祭祀仪式之前，他的主要音乐经验只是格列高利的圣咏音乐(Gregorian Chant)。利玛窦对中国祭祀仪式中丰富的礼乐音色甚为惊讶[4]。当时他所注意到的中国音乐和欧洲音乐之间的差别，只不过是文化方面的差别，并不反映音乐或声学知识方面的差别。本书以上的探讨，证实古代中国在音乐和声学方面，有杰出和领先的成就，就是在16世纪的中国，仍然有领先的创造。在利玛窦到达中国之前15年，中国人已经建立等比律制(见第5.2.2节)，初步掌握了律管音响物理的一些要点，系统地作出管口近似校正(见第5.3.2节)。这些成就于1584年发表在朱载堉的《律学新说》一书中[5]。

随着到达中国的西方传教士的日益增多，东西方科学和技术的交流速度也越来越快。这一时期内，古代科学与技术起源于何处，形成了一个争论不休的问题。到1780年，利玛窦到达中国之后两个世纪，传教士钱德明(Jean Joseph-Marie Amiot，1718～1793)在欧洲发表《中国古代与现代音乐回忆录》(*Mémorie sur la Musique des Chinis tant anciens que modernes*)一书。此时此刻，情况就完全不同了。中国和欧洲的音乐，如同在科学和技术方面一样，发展速度的反差令人震惊。中国人几乎没有取得任何有意义的进展，欧洲人则突飞猛进。欧洲古典音乐运动，已由巴赫的《十二平均律钢琴曲》(*Well-Tempered Clavier*)发展到莫扎特时代，当时，莫扎特(Wolfgang Amadeus Mozart，1756～1791)为世界谱写了不朽的乐章。

在这个古典音乐运动的高潮中，钱德明关于中国音乐的回忆录的出现，没有能引起欧洲律学界或音乐界的关注。钱

德明在中国时,对中国音律和音乐进行了比较深刻的研究,他在回忆录中的结论是:

> l'Heptachorde des Grecs anciens, la lyre de Pythagore, son inversion des tétrachordes diatoniques, et la formation de son grand système, sont autant de larcins faits aux Chinois du premier âge.
>
> 【译文:古希腊毕达哥拉斯竖琴的七音音阶,它由四度音列转换的完全音阶,以及它的整个音阶体系,多半是从早期中国抄袭过去的。】

但是,当时的欧洲律学界和音乐界认为这是无稽之谈。在整个传教士为媒介的中西交流中,钱德明可能是唯一的持有与众不同的观点的传教士,认为声学知识并不是从西方向东方传播,恰恰相反,是从东方向西方传播的。

4.1.2 沙畹谬论

19世纪的中国,国际声望进一步衰落。欧洲音乐在伟大的作曲家贝多芬(Ludwig van Beethoven,1770 ~ 1827)和勃拉姆斯(Johannes Brahms,1833 ~ 1897)的带领下,继续取得巨大的进步。如果一般人误认为古代中国音乐大概是呆板的,音调无变化,只有五声,缺乏半音,倒也情有可原。无法想象的是,诸如法国汉学家沙畹(E. Chavannes)的学术著作,竟持有上述固执之见。沙畹在1898年出版的《司马迁的〈史记〉》(*Les Mémoires Historiques de Se-Ma Ts'ien*)一书中,对中国音乐的评价是:

> le caractère tapageur et monotone de leur musique est

d'ailleurs bien connu[6].

【译文:众所周知,他们(中国)音乐的特征是吵闹和单调。】

他不但说中国音律知识来自古希腊,还武断地判定传播时间就是亚历山大(Alexander Ⅲ,公元前356~前323年)远征时期,相当于战国末期。这种论断明显违背历史事实,但是依照李约瑟和鲁宾逊所说,沙畹的论断“在近50年中[在西方]被广泛接受[7]”。

4.1.3 李约瑟—鲁宾逊假说

1962年,李约瑟和鲁宾逊在《中国科学技术史》第四卷第26节发表了中国声学史论著。这是20世纪声学史界的一篇重要著作,也是一篇西方学者认识古代中国声学的有影响的著作。

在讨论中国声学的起源时,他们回顾了钱德明和沙畹的著作,评论如下:

> 沙畹的假说必须驳斥,不仅仅是因为在毕达哥拉斯在世的那个世纪中,远在亚历山大远征把希腊音律算式带到中国形成影响之前,中国人已在调他们的十二编钟音律了,而且是因为中国音律在基本结构上与毕达哥拉斯音阶全然不同。然而,钱德明提出的如此早的由中国向西方另一方向传播的想法,也不能认真考虑[8]。

李约瑟和鲁宾逊认为,谐率(harmonic ratios)知识不起源于中国,不起源于古希腊,而是起源于古巴比伦,然后向西传

向古希腊文明,向东传向中国古代文明。有关叙述如下:

> 最为简单而理由充分的替代性假说是:这个声学萌芽的发现,即弦长是确定拨弦所发律音的一个参数,是从巴比伦向西传播到希腊人,向东传播到中国人。然后,在希腊和中国分别发展[9]。

尽管他们强调,“关于这些发现起源于巴比伦的说法仅仅是个假说,有关巴比伦音乐[他们]知之甚少”,但他们仍然提出不同的论据来支持这个假说。因此,有必要仔细审核这些论据。

有关巴比伦音乐和声学知识的材料,除了出现在苏美尔和巴比伦碑文上关于竖琴形象的信息之外,现存资料极少。李约瑟和鲁宾逊认为,希腊传统和中国传统都把声学起源归功于外国;此外,他们还认为不管是希腊人还是中国人,都未能确切地理解谐率的声学知识,这就从反面支持了外国起源说。这也就是李约瑟和鲁宾逊支持巴比伦起源说的依据。

4.1.4 巴比伦西传希腊的假说

“谐和音率知识从巴比伦向西传到希腊”的假说,应该说还有些历史依据,因为在亚历山大占领巴比伦之前很久,至少亚里士多德(Aristotle)等希腊作家就记载过毕达哥拉斯游学东方的故事[10]。此外,诸如伊安布利霍斯(Iamblichus,约公元3世纪)等后世作者,直截了当地指出谐和音率知识就是毕达哥拉斯游学后带回希腊的[11]。更有意义的,也许是早期希腊人对毕达哥拉斯发现所作的评论,其中含有李约瑟和鲁宾逊所说“谐律的误用”(misapplications of harmonic laws)。李约

瑟和鲁宾逊关于毕达哥拉斯发现所作的概括摘录如下：

> 毕达哥拉斯路过铁匠铺，听到一些铁锤叮当作响，这些锤音构成八度、五度和四度音程。仔细考查这些铁锤后，他意识到，其原因在于铁锤的重量：重量不同，发出的声音也就不同。他做了四只与铁锤重量相同的砣锤，作为实验的重量基准。无论是测量弦的张力，测量花瓶的敲击，还是测量笛子或单弦琴的长度，最后他总是发现，6、8、9、12 这四个数构成了谐音（consonances）的比率，6∶12为八度，8∶12为五度，9∶12为四度。

这段毕达哥拉斯发现谐音率的叙述在杰拉什的尼科马霍斯（Nicomachus of Gerasa，公元 1 世纪）、伊安布利霍斯和波伊提乌（Boethius，公元 480～524 年）等人的著作中，都能找到原文[12]。然而，把铁匠铺中铁锤的谐音说成是与铁锤重量成比率，是不正确的。如果这个叙述属实的话，它本身就表明毕达哥拉斯并没有正确地理解谐和音率知识。依照李约瑟和鲁宾逊的推测，对谐率缺乏正确的理解，可作为支持谐率外来观点证据。由此看来，他们所说的谐率从巴比伦西传希腊的假说，不是完全与希腊文明历史记载相悖的。

4.1.5　巴比伦东传中国的假说

现在再来考查谐和音率知识从巴比伦东传中国的假说。李约瑟和鲁宾逊引用《吕氏春秋·古乐》故事作为证据，声称"中国人自己说音律系统来源于外国"。《古乐》原文为：

> 昔黄帝令伶伦作为律，伶伦自大夏之西，
> 乃之阮隃之阴，取竹于嶰溪之谷，

以生空窍厚钧者,断两节间,其长三寸九分,
而吹之,以为黄钟之宫,吹曰“舍少”,
次制十二筒,以之阮隃之下,听凤凰之鸣,
以别十二律,其雄鸣为六,雌鸣亦六,
以比黄钟之宫适合,
故曰“黄钟之宫,律吕之本”。

【释文:古时黄帝命伶伦设造律。为此,伶伦从大夏出发向西,到达阮隃北坡,在嶰溪山谷中采得一些两端孔径相等、管厚一致的竹竿。在两端竹节之间,取出三寸九分长的一段,经试吹,得到黄钟律基音。反复试吹满意后,才着手制成十二支竹律管。又到阮隃山脚下,倾听凤凰的鸣叫,以便辨别十二管律的音色。雄凤凰之鸣相应六个律,雌凤凰之鸣也相应六个律,均相配黄钟基音。因此可说,黄钟基音就是生出律和吕这两组律的基础。】

故事的叙述是为了设黄钟基音律,以标准化十二律,而不是叙述如何建制十二律。如果把这个故事当作证据,就断定中国音律学系统来源于某个外国,实在令人难以置信,因为这个故事宣扬着古代中国一种哲学信仰,认为宇宙存在着一个与大自然相和谐的、普遍适用的“宇宙”律。因此,试图设置黄钟基音与大自然相和谐,成为普遍适用的律。

这么说来,伶伦西行到竹乡,寻找两端孔径相等的竹竿,目的就在于确定黄钟律。一旦找到适用的竹竿,确立黄钟律,就能以黄钟为基音,制作出十二支一套律管来。故事介绍说,伶伦比较所得管律与凤凰鸣声的音色,在于确保以黄钟为基音构作的律管,确实能与大自然相和谐,从而验证他们的哲学信念。

故事把黄帝与伶伦西行扯到一起,使后人很难考证故事的确切日期和历史性。然而,故事中伶伦提到十二律有律和

吕两组的区别，这就说明，故事发生的时期，在把十二律划分成律和吕两组的实践之后。因为十二律是由六律中插入六间而形成的（见第1.1节）。分十二律为律和吕两组的实践，决不会出现在十二律音阶诞生之前，换句话说，先有十二律音阶，后才有伶伦西行的故事。

伶伦西行的动机是寻找两端孔径相等、管厚一致的竹竿，以定黄钟的基音律。这不仅是个合理的要求，而且是个具有相当科学价值的要求，因为建制黄钟标准律和十二律管，管腔厚薄的均匀十分重要。由此可见，伶伦西行是要寻找合适的竹竿，而不是寻找十二律的建制法，这也表明伶伦在西行时早已具备了建制律的知识。还必须指出的是，西行所去，并不是不同文明的某个外国，而是阮隃，仅仅是中国昆仑山北部的一个产竹之乡。这么说来，伶伦西行的故事，即使不去计及它的确切日期和确切历史，也决不能如李约瑟和鲁宾逊那样，轻率地被当作表明古代中国声学源于外国的证据。

李约瑟和鲁宾逊还凭借两条谐率知识的误用，作为巴比伦东传中国假说的证据。一条是石磬谐率的误用，另一条是青铜公式中谐率的误用。前一条证据起源于钱德明，他测量过宫殿中某一套宋代石磬的频率。但是，钱德明的测量值与所有现存石磬测量值都不符合，包括近10年中出土的公元前5世纪曾侯乙编磬和第3.1节中说到的商代三枚石磬。钱德明本人作过一个注，说他自己也发现，这些测量与其他相近年代宋代石磬的谐率不同[13]。钱德明这个注正表明了，他所见的那一套宋代石磬属于例外情况，不代表中国古代的石磬。

李约瑟和鲁宾逊的第二条证据，是《考工记》中的著名青铜公式。原文摘录如下：

六分其金而锡居一，谓之钟鼎之齐。

五分其金而锡居一，谓之斧斤之齐。
四分其金而锡居一，谓之戈戟之齐。
三分其金而锡居一，谓之大刃之齐。
五分其金而锡居二，谓之削杀矢之齐。
金锡半，谓之鉴燧之齐。
【释文：六份铜一份锡，铸钟鼎用的青铜配比公式[14]，
五份铜一份锡，铸斧斤用的青铜配比公式，
四份铜一份锡，铸戈戟用的青铜配比公式，
三份铜一份锡，铸大刃用的青铜配比公式，
五份铜二份锡，铸削杀矢用的青铜配比公式，
铜锡各半，铸铜镜用的青铜配比公式。】

这一系列公式介绍制作不同青铜合金的铜锡配比，用于制作多种容器和工具。

公式中“金”字的解释是个关键，理解不同，就可能得出两组铜含量比率数据。按我们的解释，“金”指现在的铜。李约瑟和鲁宾逊则把金解释成青铜，从而得到铜含量的比率分别为$\frac{5}{6}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{5}$和$\frac{1}{2}$，发现这几个值对应着纯律中的音程小三度、大三度、纯四度、纯五度、大六度和八度弦长之比[15]。由此，李约瑟和鲁宾逊认为，这些谐率数据出现在青铜配比公式中，表明中国古代铸造工匠误用谐率知识。其实，他们的这种解释只不过是一种没有根据的推测。

推测背后隐含着一个前提，即当这些谐和音率出现于《考工记》中青铜公式的时候，巴比伦人已经拥有纯律半音音阶知识了。据李约瑟估计，《考工记》“这一段不可能晚于公元前3世纪，还可能更早些”[16]。那就等于说巴比伦至少在公元前3世纪就具有纯律半音音阶知识了，但这是没有任何根据的。况且在中国，纯律半音音阶在公元前5世纪的曾侯乙

编钟中就已出现。本书第3.5.2节已介绍和分析过曾侯乙时代推导纯律的角—曾法。

就是退一步来讲，如果确实如李约瑟和鲁宾逊所说，青铜公式中铜锡比率来自误用谐率知识，那么值得提问的是，为什么只用一个谐率作为铸钟公式，而把其他谐率用来铸造与发音没有关系的各种青铜器具？为什么不用来铸造不同律音的青铜钟？

其实，确凿的证据充分表明，把“金”字解作青铜是错误的。“金”这个词一般表示金属，在古汉语中，高纯度铜也叫做金。根据这种理解，得出《考工记》的公式铜含量比率分别为$\frac{6}{7}$、$\frac{5}{6}$、$\frac{4}{5}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{7}$和$\frac{1}{2}$，其中$\frac{6}{7}$比率正是“谓之钟鼎之齐”。那就是说，《考工记》中的铸钟公式之青铜配比当是，铜含量$\frac{6}{7}$，锡含量$\frac{1}{7}$，并不对应于纯律中的任何音程率。现在我们可以确认，公式中的“金”字的确指金属铜。因为近年来对曾侯乙编钟的复制研究表明，曾侯乙编钟青铜中锡含量平均为13.75%[17]。这正印证了我们把“金”解释为铜的正确性，不论古巴比伦当时是否已经知道了纯律音程。

《考工记》中的青铜公式是古代中国一项超时代的成就，公式中的比率是由实践所得的铜锡配比，“齐”概念在铸造青铜器时的出现和应用，是具有深刻科学意义的首创，它与谐率无关。

4.1.6 曾侯乙编钟和麦克莱恩论断

曾侯乙双音编钟的发现（见图2.4.1），对传统声学史有着极大的影响。传统声学史不仅偏重于古希腊的成就，而且

往往建立在数个世纪后叙述的基础上,没有以实物或早期原文记录为依据。曾侯乙编钟的出现表明,公元前5世纪[18],最迟约在毕达哥拉斯(约公元前570~前497年)去世64年后,中国人不仅已经拥有十二律和纯律半音音阶(见第3.5节),而且把这些音阶成功地建制到编钟中。曾侯乙编钟的音阶已超过五个八度,其律音范围直到18世纪才被欧洲键盘乐器超过。

这个考古发现,不但彻底摈弃了沙畹所谓中国古代音律学系统是在亚历山大远征期间从希腊传入的谬论,而且,向毕达哥拉斯具有发现谐和音率知识优先权的传统说法[19]提出了强有力的挑战。然而,仍然有些学者坚持认为,曾侯乙编钟进一步支持中国古代音律学系统源于巴比伦的论断。麦克莱恩(Ernest G. McClain)就提出如下论述:

> 中国的和希腊的律历结合,都可以追踪到间接包含于古巴比伦乘法表中的"正确"谐和方阵,在曾侯钟铸成前至少14个世纪的巴比伦 *Enuma Elish* 创世神话中已有所暗示。只有当音乐上的八度2:1被扩展到720:360(即一个圆周有360个单位)时,八度才形成一个适当的比率,有足够的整数来规定一个十二音的音阶,以此来满足古人对完美对称的喜爱——艺术、科学和政治理论的一种主导观念。[20]

麦克莱恩论断的基础在于,他主观地认为十二音阶的建构与巴比伦360等分圆有联系,而且把这种联系看为是律历相联的最早依据。此外,他还把律历相联的实践,作为传播的证据,认为谐率知识是从巴比伦传播到中国和希腊,并且把构制曾侯乙编钟音阶的观念,溯源于巴比伦创世神话时代。

值得在此提出讨论的是,不同文明所具有的某个共同实

践或思想，在什么情况下可判断为传播的证据，而不能作为人类天性的一部分？在假设音率知识起源于古巴比伦时，李约瑟和鲁宾逊也提出律历相联为一个依据。事实上，音律与天文相联的实践，多少出现于所有古代文明，我们能否不管是否具有传播的证据，就把所有古代文明的音率知识都认为起源于古巴比伦呢？讨论古代中国声学的起源，我们必须弄清判断传播的标准。下节中我们将进一步讨论声学与天文学的结合和单源说的问题。

4.1.7 声学与天文学的结合

谐音现象似乎与天文现象有着某种联系，这种直觉想法实在令人神往，显然也是古人能够接受的。许多古代文明都试图把声学和天文学结合起来。

古希腊文明中毕达哥拉斯的“天球的谐音”（或称“天球的音乐”），便是一个众所周知的例子。在毕达哥拉斯的宇宙框架中，宇宙的动力来自中心火球，围绕着它循环的，是假定为球体的太阳、月亮、地球、不可见的反地球等天体。这些天体因离中心火球的循环距离不同，发出不同的但互相和谐的谐音。尽管没人听到过这些谐音，但是这个想象不仅为西方众多的后世学者所接受，而且衍变出确定天体谐和音率的五花八门的方案[21]。

古巴比伦人也不例外，把音律与天文相互联系起来。李约瑟和鲁宾逊引用普鲁塔克（Plutarch，约 46 ~ 120 年）《摩拉里亚》（*Moralia*）一书中确定季节的法则，作为巴比伦人将和声现象与天体现象结合起来的典范：

迦勒底人（Chaldeans）说，春季对于秋季是四度关

系，对于冬季是五度关系，对于夏季是八度关系。但是，如果欧里庇得斯（Euripides，约公元前5世纪）正确地把一年划分成为夏季四个月，冬季同数，众所爱好的秋季二个月，春季同数，季节就会遵照八度比率交替运作。

在此普鲁塔克所述说的四季划分，正是巴比伦人利用谐和音率，作为划分四季比率的一个具体例子。李约瑟和鲁宾逊指出，"比率中的数据，实际上是春季6，秋季8，冬季9和夏季12，这就是毕达哥拉斯的音乐谐音数据。"由这四个数据与四个季节12个月的关系，他们推算出巴比伦人的季节为：春季2.1$\left(\text{即}\frac{72}{35}\right)$个月，秋季2.7$\left(\text{即}\frac{96}{35}\right)$个月，冬季3.1$\left(\text{即}\frac{108}{35}\right)$个月和夏季4.1$\left(\text{即}\frac{144}{35}\right)$个月[22]。

中国文明也有将声学与天文学结合起来的实例，但是没有像巴比伦和希腊那样，在实际上借用谐和音率关系去确定季节或推算天文现象。现存文献中，天文著作可能涉及音律推算数据的，只有一处，那就是保留在《周髀算经》中的周代陈子的工作。陈子主张"同术相学，同事相观"，他在研究光的性质时，参考了声的性质，提到观律听钟。正像人所听闻远近，在于声音的传播，陈子认为"人所望见远近，宜如日光所照"。他假定阳光照射地面的范围，不超过一个以810 000里为直径的圆的面积。陈子并没有解释这个数据的来源，有人认为也许来自音阶推算的起算数81。根据现存《管子》五声音阶推算的记载，81之所以作为五声音阶起算数，只是为了避免非整数，因为原文清楚说明81是3的四次幂，而且整个计算过程中，四次除法都除以3（见第3.3节）。由此可见，陈子810 000里这个数据是否是起算数81，尚待考证。再退一步，就算能接纳它作为声学与天文学结合的例子，还是与巴比

伦和希腊文明不相同，因为数据81只是导生音阶所用的起算数，显然不是谐和音率。

古代中国把声学与天文学结合的做法，主要出现在描述音律系统和日历系统方面。列出月与律对应表：

春季第一月	太簇
春季第二月	夹钟
春季第三月	姑洗
夏季第一月	仲吕
夏季第二月	蕤宾
夏季第三月	林钟
秋季第一月	夷则
秋季第二月	南吕
秋季第三月	无射
冬季第一月	应钟
冬季第二月	黄钟
冬季第三月	大吕

《月令》所载音律与历的结合，不是两个领域物理原理方面的交叉，也不是两个领域计算数据方面的借用，而是一种模式辨认[23]。这类音律与历法的结合仅是形式上的结合，以便执行有关活动的辨认。我们知道，中国历法中季节和月份的推算都以天文观察为基础，根本没有牵涉到音律。同样，音律系统的推算则要通过律音的测量，根本没有牵涉到天文。用这种模式把音律与历法相结合，与借用音律数据确定天文现象的结合，在本质上没有共同之处。

中国人很早就把音律与天文同视为自然之道，传统上把这方面的研究和观察结合在一起，值得注意的是，音律系统和日历系统在数理性质上确实有一些相似之处。因为，一年不

能以朔望月整分为十二个月，一个八度不能以一个没有调节过的谐率整分为十二个律音。古代中国使用两种长度不等的月，把一年分为十二个月，相应地，使用两种不同的音程把一个八度分为十二个律音[24]。这种潜在特性上的类似和解决方案上的类似，对于早期学者说来，令人神往。从汉代起，就把相关音律和天文的记载，收入到朝代史的《律历志》中。《二十四史》中，只有《史记》一书把两个领域分开记载。

毫无疑问，在古代的巴比伦、中国和希腊，都曾有声学与天文学结合的实例。但古代中国人的实际操作，不同于古巴比伦人和古希腊人。以上所举的现存实例，不得不令人怀疑，这种仅凭声学与天文学结合为传播证据的结论。研究传播一定要以具体证据为依据。

4.1.8　单起源还是多起源

无论是李约瑟和鲁宾逊的假说、钱德明的推论，还是沙畹和麦克莱恩的论断，背后都隐含着一个内在的假定，即音律学只有一个起源。这个单起源假定究竟有没有道理？从逻辑上讲，显然并不存在任何理由可以先验地排除多起源的可能性。人类文明的发展，尤其在古代，是相当重复而不协调的。同一概念或思想，可以有分散的发现，也可以有各自的发展，这个现象与其说是例外，不如说是常例。

谐和音率3:4、2:3、1:2的发现也不例外，不能假设它们的发现只可能出现在一个地方，只可以出现一次。在谐和音的鉴定上，人耳并没有人种区别和地域区别[25]。只要鉴定正确，得出的相应谐和音率，同样是3:4、2:3、1:2。于是我们完全不难想象，同样的谐和音率可以被不同文明中的不同研究者独立地发现。

一个从事声学起源研究的人，缺乏具体的传播证据，又默认谐和率单源说的假设，这种状况必然会影响到他对经过漫长历史而残存至今的一些稀少的古代谐率史料所作的解释。就以钱德明和沙畹关于声学起源的论述为例。当他们考虑声学起源于中国还是希腊时，出于单源说的假定，就无意中只想在其中选择一个，这个限制必然会影响到他们关于两个文明之间音律学传播的结论。

李约瑟和鲁宾逊则扩大了所涉及文明的数目，从中国、希腊两个文明，扩大到中国、希腊、巴比伦三个文明，但他们仍然假定单源说，很显然，他们并没有认真考证过古巴比伦是不是音律学的唯一起源，也没有认真考证过传播的证据。他们仅仅试图提供一些似乎相关的第二手证据，来支持巴比伦起源说。一个二手证据是所谓《考工记》中的青铜公式误用谐率，另一个二手证据是把伶伦西行故事错误地当成证据，说中国人自己把声学起源归于西方外国，他们毫无根据地推崇传播之说，明显地暴露出他们对单源假说的默认。其实，如果按照他们的逻辑推理，误用谐律比率公式就可以作为谐率知识来自外国的证据，那么，由于古巴比伦人误用谐律比率公式来确定季节，我们也就可以立即得出结论，古代巴比伦的调率公式来自某个外国。

近年来考古发掘到一些保持发音功能的中国古代乐器，为后人探索中国音律的发展，提供了大量新证据。其中特别重要的是约公元前 5700 年新石器时代的七孔骨笛（见图 3.1.1）和公元前 5 世纪的曾侯乙双音编钟（见图 2.4.1）。这些发现证明，不但音乐声学在中国文明中出现得非常早，而且与同时代人相比，中国的声学知识不但非常先进，而且往往领先。古代中国的音律系统极有可能是内在发展的。

4.2 八度和纯四度问题

李约瑟和鲁宾逊反复地强调,毕达哥拉斯音律学系统与中国音律学系统具有本质的不同,基本不同点在于八度和四度的比率。所谓中国音阶缺乏纯八度和纯四度的论调,本来早已出现于西方著作中,但他们两人的表述毕竟比较清晰,比较齐全。为澄清这些陈词滥调,我将多次引用李约瑟和鲁宾逊的著作。

4.2.1 纯八度问题

汉学家和科技史学家曾一致认为,中国音乐理论中没有纯八度概念[26]。例如巴塞洛缪(Bartholomew)《音乐的声学》(*Acoustics of Music*)一书中,有这样一段:

> 八度是唯一一个在所有音阶中都能找到的音程,不管在哪一个国家,也不管在哪一个历史时期,都能找到八度,甚至在理论不纯的中国古代音乐中,十分正确的八度仍然可能在实际应用中出现[27]。

李约瑟和鲁宾逊对中国古代音律理论有下列评述:

> 另一方面,中国[十二律]音列只需要最简单的数学运算,并不用八度起算。确切地说,它甚至完全不包含纯八度[28]。

在本节中,我将批驳缺乏纯八度和纯四度的这些说法,并

对中国音律系统和毕达哥拉斯系统进行比较。

前文介绍过古代中国导生音阶的方法,第3.3节介绍五声音阶的推导,第3.4节讲上下相生原理,第3.5节讲半音音阶导构法。所有这些例子,不但体现出纯八度的确切概念,而且包含了八度的基本演算。八度概念确确实实具有原始的记录,无需仰仗后人的分析就能找到。我们在《吕氏春秋》的半音音阶图(图3.5.1)上,叠加了《管子》(图3.3.1)的五声音阶,结合成图4.2.1。[29]在图4.2.1中,十二音阶之林钟音与五声音阶之“徵”音的音程比为54∶108,确实为纯八度1∶2。同样,南吕音与“羽”音的比为48∶96,也确实为纯八度1∶2。这实在是顺理成章的,因为如图3.4.1所示,上下相生原理的基础就是八度的确切概念。

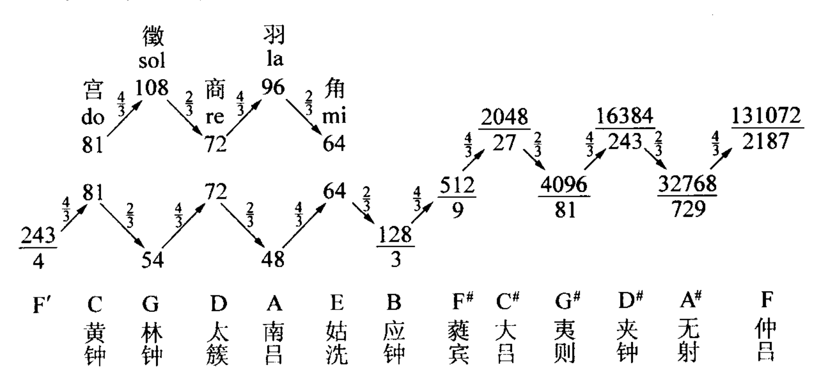


图4.2.1　利用上下五度相生法导生的五声音阶和半音音阶之间八度关系示意图。

《吕氏春秋》三分损益法原文原术,明白无误地使用八度的确切概念。根据第3.5.1节三分损益的生律途径,在上生出蕤宾律之后,接着应该生出大吕律。原文称大吕“为上”,因而形

成如图3.5.1所示之连续两次上生。这里之所以上生之后再跟着一次上生，正是因为上下相生原理，需要把生出的大吕律移回到八度范围内。为便于观察，我们把黄钟基音数81改写成1，使得八度范围内所有音程数据都介于1和$\frac{1}{2}$之间，这等于用1作为推算音阶的起算数。如图4.2.2所示，如果由蕤宾律下生大吕律会得到0.4682，不在1和$\frac{1}{2}$之间。那就是说，下生所得的大吕超过了八度范围，根据上下相生原理，只好改用上生。《吕氏春秋》采用的正是上生。如此得到的大吕律是0.9364，保证了大吕律位于黄钟基音的八度范围内。上生和下生的大吕律这两个值，正相隔一个八度：$\frac{0.4682}{0.9364}=\frac{1}{2}$。

图4.2.2所示的分析，证明八度的确切概念，不但得到了正确的理解，而且明白无误地出现在早期中国音律学家和音乐家的实践和理论中。

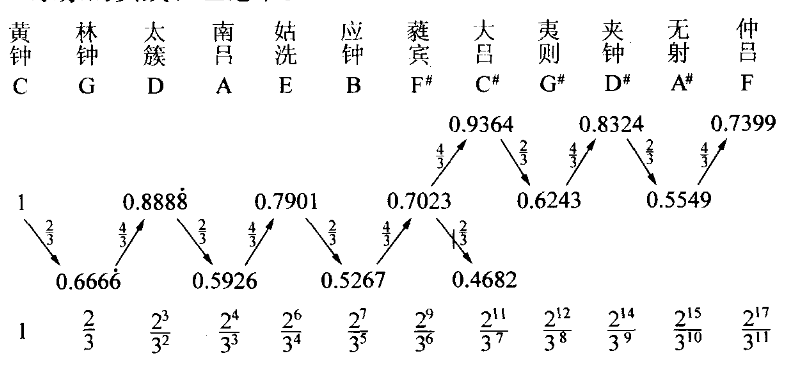


图4.2.2 《管子》和《吕氏春秋》所述三分损益法，利用纯五度音程导生半音音阶。

4.2.2 “中国八度”问题

所谓的“中国八度”(Chinese Octave)是什么,需要加以澄清。李约瑟和鲁宾逊认为《吕氏春秋》所载三分损益法是“五度旋生(spiral of fifths) 法”,由此法所导生的十二律根本就不是音阶,因为其八度不是纯八度, 而是近似的八度,他们称之为“中国八度”。为进一步说明他们所谓的“中国八度”,我们先把图3.5.1所示三分损益法的上下五度相生的生律途径,改画成五度旋生法的生律途径,得到图4.2.3所示的圆形连环生律途径。

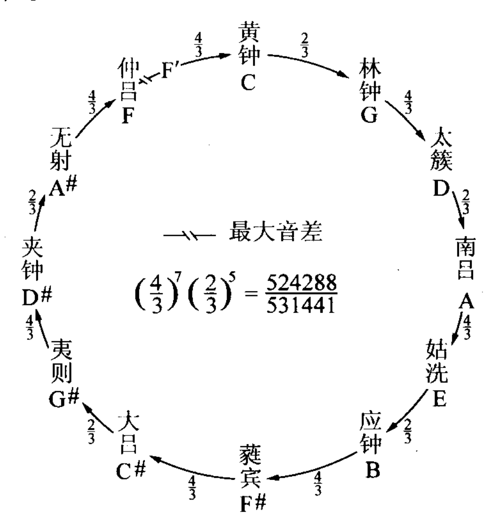


图4.2.3　把图3.5.1中用《吕氏春秋》法所推算出来的半音音阶改画成连环圆形,得到的五度旋生。

图4.2.3表明,最后生得的仲吕律(F),不是用来导生黄

钟律(C)的那个 F′ 律,因为 F 律和 F′律之间相隔着一个音差。绕着图 4.2.3 的连环生律途径可知,这个音差的音程是由七次上生和五次下生组合而成的,因而得到

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}=\left(\frac{2^{19}}{3^{12}}\right)=\frac{524288}{531441}$$

这个数据表明,在 F 律和 F′ 律之间的音差正是著名的最大音差(comma maxima)。

李约瑟和鲁宾逊正确地注意到,中国人用纯五度导生十二律系统,但他们误认"五度相生"为"五度旋生",把"五度旋生"中的"八度",$\frac{262144}{531441}$(即最大音差的$\frac{1}{2}$),认为是"中国八度"。相关段落摘录如下:

> 如此生出的"中国八度"和纯八度之间存在着明显的差别,纯八度的比是 1∶2,而五度旋生"八度"的比是 262144 ∶531441。因而,在纯八度和中国"八度"之间的比是524288 ∶ 531441。这称为最大音差,现在常常称为毕达哥拉斯音差,因为五度旋生被错误地与毕达哥拉斯的名字扯在一起[30]。

他们的结论,并不是说在实践上古代中国人不知道纯八度,而是说中国在理论上推算出来的八度,不是纯八度。于是他们认为,

> 不应该想象这种音列具有音阶功能,称这种音列为"中国半音音阶"是错误的[31]。

正是这个原因,他们在自己的著作里称中国十二律为 gamut (音列)而不是 scale (音阶)。然而,他们的结论是错

误的，他们所谓的“中国八度”和对三分损益十二律功能的看法，来自他们对《吕氏春秋》所载三分损益法的误解，误认为中国的三分损益法就是西方的五度旋生法（见第5.1节）。确实，西方五度旋生法所导出的十二音阶含有最大音差，这也正是西方音律学界所面临的一个比较顽固的问题。约从16世纪到18世纪，欧洲音律学界主要的研究之一，就是如何处理最大音差，怎样把音差均分到八度之间的律音上（见第5.4.1节和第5.4.2节）。中国三分损益法虽然也利用五度生律，但同时也利用八度，建立上下（损益）相生原理，允许生律途径的选择，操纵导生律音的八度范围。由此，保证所得音阶的各个律音，最终定位到同一个八度内，成功地避免了在三分损益十二律之中出现最大音差。

要想理解《吕氏春秋》所载三分损益法，必须弄明白的关键之处，就是黄钟律的导生，尽管《吕氏春秋》讲得清清楚楚，是由上生而得（见第3.5.1节），可是没有说是由仲吕律上生而得，对上生黄钟律的律，《吕氏春秋》不仅没有给出律名，而且也只字不提。这是因为生黄钟律的F′律（见图4.2.4）不属于推算中的黄钟十二律[32]。这就说明，高八度的黄钟律（c），不可能由仲吕律下生而得，因为黄钟律（C）不是由仲吕律（F）上生而得，那么依照上下五度相生原理（见图3.4.1），高八度的黄钟律（c）也不可能由仲吕律下生而得。由此可得到结论，由仲吕律下生所得的律，不能用来推算黄钟十二律的八度。

正是在这一点上，李约瑟和鲁宾逊既错误地理解了三分损益法的生律过程，又错误地把他们所谓的“中国八度”硬插进中国的十二律系统。有关段落摘录如下：

……音列的律音共有十二个（第十三音，即八度，可

以简单通过再进行一次计算而加入)[33]。

他们加入第十三音的过程,可以用图 4.2.4 表明,图中把从仲吕律(F)用下生所加入的十三音记作 c′(见左边的圆)。因为 F 律和 F′ 律之间相隔一个最大音差$\frac{524288}{531441}$,显然,所加十三音(c′)和黄钟律(C)之间的音程不是$\frac{1}{2}$,而是$\frac{262144}{531441}$。其实古代记录根本就没有多算这一步,搞个什么十三音,也没有把十三音当作“八度”音。

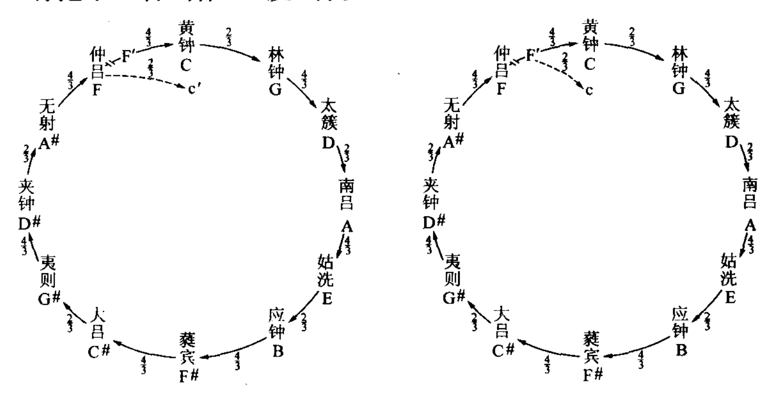


图 4.2.4　左图,李约瑟和鲁宾逊用五度旋生所推算出的十二音列,加上记作 c′ 的十三音,称作中国八度。右图,用上下五度相生法所推算出的八度,记作 c,姑且采用五度旋生的形式。

虽然依照上下五度相生原理,高八度黄钟律不可能由仲吕律下生而得,因为黄钟律不是由仲吕律上生而得,但是高八度黄钟律(c)可由上生黄钟律(C)的 F′ 律下生而得。如此得到的黄钟律(见图 4.2.4 右圆,记作 c)确实比黄钟律(C)高八度。

如今，为了表明与五度的关系，三分损益法通常称为上下五度相生法，但是不能把五度相生中“相生”一词与五度旋生(spiral of the fifths)的“旋生(spiral)”混为一谈，因为“相生”有八度范围的选择[34]。在《吕氏春秋》记载中，虽然只叙述了八度之内十二律音的导生(见图3.5.1)，但是在这个生律途径上，每一步都可以选择由一个八度转移到另一个八度。为了揭示这个贯穿八度的结构，我们在图4.2.5中把两个相差八度的十二律画成五度旋生形式，通过上下相生原则的关系连接起来，连接关系用带箭头的虚线表示。所生高八度的律，

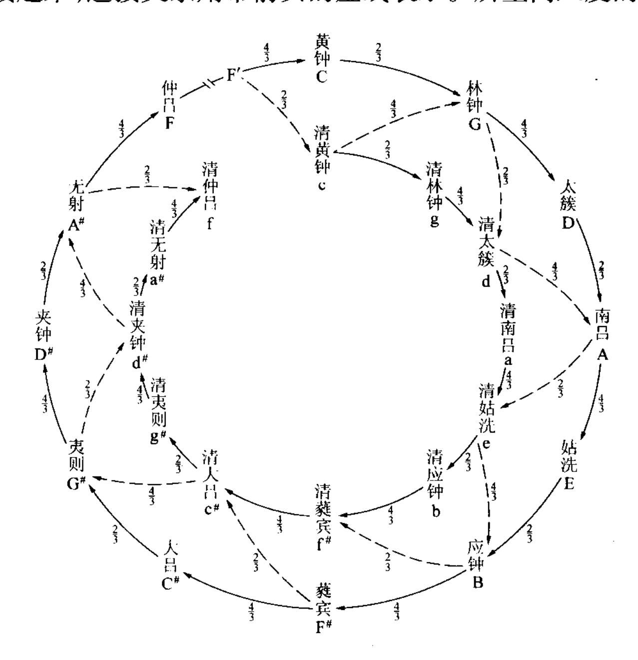


图4.2.5 采用五度旋生形式的两个相隔八度的《吕氏春秋》半音音阶，绕过最大音差分割相连的示意图。

全都冠以"清"字。图中可以看出,从一个八度沿着虚线箭头就能转移向另一个八度,根本不需要经过最大音差分割。

以上的分析证明,在古代中国,纯八度不仅仅使用于实践,而且在理论上已经掺入到推导音阶的方法中,有关细节参见图4.2.2和图4.2.5,也可参见图3.5.2和式(3.2)。历史事实是,无论在《管子》还是在《吕氏春秋》的记载中,中国音阶从来没有出现什么最大音差。因此,李约瑟和鲁宾逊关于"中国八度"和中国十二律功能的两个结论,必须予以纠正。

4.2.3 纯四度问题

澄清"中国八度"问题之后,我们转向纯四度问题。汉学家和科技史学家同样也认为,中国音阶中没有纯四度概念。李约瑟和鲁宾逊做过一个评述:

> 可以看到,无论在结构的一般性方法上,还是在某些音的特定比上,比如八度和四度,毕达哥拉斯音阶和中国(五度旋生)的[十二]音列并不等价[35]。

由表3.5.1可见,中国十二音阶中"黄钟—宫"律调四度的比率,确实不像希腊七声音阶的纯四度,它不是3:4,而要比纯四度略高一点:

$$\frac{131072}{177147}=\frac{3}{4}-\frac{7153}{708588}$$

李约瑟和鲁宾逊观察到的四度现象就是如此。

然而,上述区别只出现在以黄钟律作为基音的十二律音阶中(见表3.5.1和表4.2.1)。其他十一个律调中,四度的比率确确实实是3:4。文献证明,中国古代很早就理解旋宫

原理，确实用过十二律中的每个律作基音，因此所有十二个律调都很活跃。这也就是说，略升的四度只出现在十二律调中的一个律调之内，不能说成是中国音阶的一般特点。何况纯四度早就出现在现存最早的音阶推算记载中，《管子》所载徵调五声音阶的推算中就有纯四度（见第3.3节）。

值得注意的是，李约瑟和鲁宾逊在此所说的中国音阶，是三分损益十二律而不是三分损益所导生的七声音阶；所说的毕达哥拉斯音阶，不是“五度旋生”的十二律音阶，而是古希腊爱奥利亚（Ionian，以C′为迄结音）调式的七声音阶。这个七声音阶可用升音序表示为：

全音—全音—半音—全音—全音—全音—半音。

这个音阶就是现代所谓的完全音阶（diatonic scale），具有“大”调式排列[36]。然而要正确分析大调七声音阶与三分损益十二律音阶之间的关系，我们就应该比较十二律中七声音阶的结构。由表3.5.1所列十二律调，得出《吕氏春秋》三分损益音阶中内嵌的七声音阶，如表4.2.1所示，三分损益十二律调中有七个具有与完全音阶大调完全一样的七声音阶结构，即：“大吕—宫”、“太簇—宫”、“姑洗—宫”、“蕤宾—宫”、“林钟—宫”、“南吕—宫”和“应钟—宫”。

这就是说，中国三分损益十二律音阶系统包含了毕达哥拉斯七声音阶。上面已提到过，文献证明十二个律调的早期实践，近来出土的乐器中，又发现了实物证据。公元前5世纪的曾侯乙编钟和编磬等乐器实物的铭文，都表明当时的曾国及其邻国已普遍应用旋宫，铭文提到“黄钟—宫”、“太簇—宫”、“姑洗—宫”、“妥（蕤）宾—宫”和“郘（应）钟—宫”等律调。这就是说，这些律调的出现和应用不晚于公元前5世纪，与毕达哥拉斯属于同一个时代[37]。

表 4.2.1 《吕氏春秋》半音音阶中内嵌的十二个宫调七声音阶与纯律七声音阶和希腊爱奥利亚调式七声音阶的比较

律调 / 音程	黄钟 C	大吕 C$^{\#}$	太簇 D	夹钟 D$^{\#}$	姑洗 E	仲吕 F	蕤宾 F$^{\#}$	林钟 G	夷则 G$^{\#}$	南吕 A	无射 A$^{\#}$	应钟 B	希腊	纯律
基音	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
大二度	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
大三度	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{4}{5}$
纯四度	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
纯五度	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{177147}{262144}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
大六度	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{3}{5}$
大七度	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{8}{15}$
八度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

即使不去考察内嵌在半音音阶中的毕达哥拉斯七声音阶，人们也能考察到按上下五度相生法直接推导出的七声音阶。用图 3.5.1 中首先生成的七个音，就可以构成七声音阶。图 4.2.6 展示这七个音的音程结构。

由此导生的七声音阶，具有五个全音$\frac{8}{9}$和两个半音$\frac{243}{256}$，与菲洛劳斯（Philolaus）（见第 4.4 节）所说希腊音阶完全一致。这些音程满足下列八度关系：

$$\left(\frac{243}{256}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^5=\left(\frac{3^5}{2^8}\right)^2\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^5=\frac{1}{2}$$

为了分析这七声音阶的调式结构，我们依照旋宫原理在

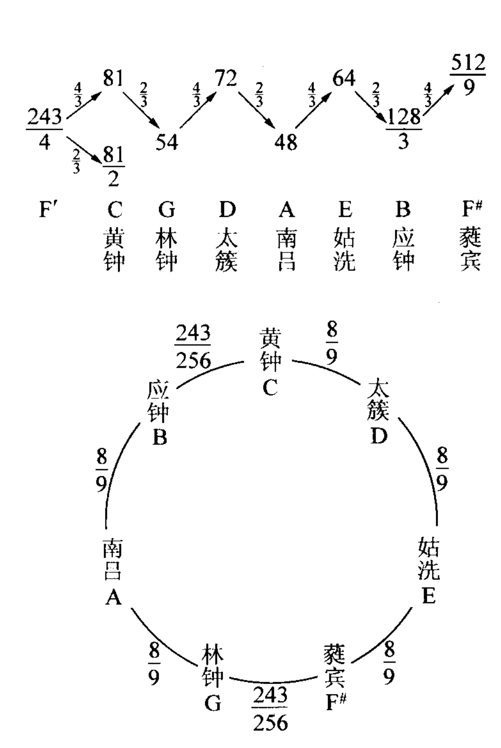


图4.2.6　利用上下五度相生法所推算出来的七声音阶及其八度圆。

表4.2.2列出音阶的七个调式。由所列音程可以看到,除了黄钟之外,每个调式的四度比率都是3∶4。而且可以看到,"林钟—宫"律调与爱奥利亚调式的希腊音阶具有完全相同的音程。由此可见,不但三分损益法所导生的十二声音阶,内嵌着古希腊七声音阶,而且三分损益法所导生的七声音阶,就是古希腊七声音阶。李约瑟和鲁宾逊所说的纯四度问题出于不适当的比较。

表4.2.2 与以上下五度相生法直接推导出的七声音阶,同爱奥利亚调式的希腊七声音阶的比较

律调 音程	黄钟 C	太簇 D	姑洗 E	蕤宾 F$^{\#}$	林钟 G	南吕 A	应钟 B	希腊
基音	1	1	1	1	1	1	1	1
小二度				$\frac{243}{256}$			$\frac{243}{256}$	
大二度	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
小三度			$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$		$\frac{27}{32}$	$\frac{27}{32}$	
大三度	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$
纯四度		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
增四度	$\frac{512}{729}$			$\frac{729}{1024}$				
纯五度	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
小六度			$\frac{81}{128}$	$\frac{81}{128}$			$\frac{81}{128}$	
大六度	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$			$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$		$\frac{16}{27}$
小七度		$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$		$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	
大七度	$\frac{128}{243}$				$\frac{128}{243}$			$\frac{128}{243}$
八度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

值得注意的是,由表4.2.1(或表3.5.1)可见,类似纯四度的现象也出现在纯五度上,我们可以看到,仲吕律调中的五度比纯五度要略微降低:

$$\frac{177147}{262144} = \frac{2}{3} + \frac{7153}{786432}$$

这个出现在仲吕律调中的五度差值,不存在于其他十一个律调中,类似于四度差值,也只出现在一个律调中。能不能就此而得出结论,说毕达哥拉斯音阶和中国音阶的五度比值

不同？这个问题与上面如何看待四度的问题，事实上属于同一件事。两个问题的答案，同样应该是否定的，不仅仅因为单独的仲吕律调或黄钟律调都不足以代表整个中国音阶系统，而且因为单独的爱奥利亚调式（或利第亚调式）也都不足以代表整个希腊音阶系统。古代希腊人对音序改变和乐律音阶、音程变化同样地感兴趣和喜爱，并习惯于按部落命名音阶的不同调式。如果把旋宫原理应用到以爱奥利亚调式为代表的音阶上，就会得到一组与表 4.2.2 总体结构相同的音阶系统。遗憾的是，有关早期的希腊调式系统，缺乏详细的文献记载，这一段历史至今仍然模糊不清[38]。

表 4.2.1 和表 4.2.2 显示出，中国音阶系统和希腊音阶系统具有惊人的相似性。在十二半音律调中有七个内嵌着古希腊七声音阶，与毕达哥拉斯七声音阶完全一样，只有一个律调的四度和另一个律调的五度出现差值之外，其他律调的四度和五度都是纯四度和纯五度。若以七声音阶互相比较，则基本上一样。事实上，纯四度和纯五度早就出现在以理论推导出来的五声音阶中，那就是现存最早记载于《管子》的徵调五声音阶（见第 3.3 节和第 3.4 节）。由此可见，纯四度和纯五度与纯八度一样，不仅仅在实践中得到应用，同时也可以从理论推导出来。

值得提出的是，这个“四度差值”出现在黄钟律调中，或“五度差值”出现在仲吕律调中，并不是一个独特的现象，因为，利用不同十二律的选择，都可以把这个“四度差值”（或“五度差值”）由黄钟（或仲吕）转移到其他律调中，而不改变音阶系统的总体结构。前文说到，《吕氏春秋》选择的十二律，并不包括未加命名的 F′律。假如在十二个选得律中，把仲吕（F）律换成未加命名的 F′律，可得到一个排列不同的十二律半音音阶。图 4.2.7 对比了这两种不同选择所造成的半

音结构。

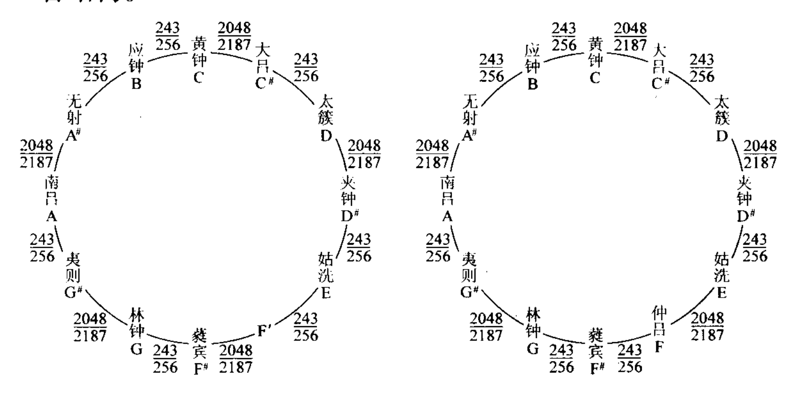


图4.2.7　右图为《吕氏春秋》十二律音阶的半音结构，左图为律的另一种选择法的半音结构。

尽管半音的排列不同，由于音阶系统的循环性质，相对于系统的总体结构来说，两种选择法实际上是等价的。这种现象可以证明如下：通过 F′律和应钟律画一条线，作为八度圆的对称轴（图 4.2.7，左图），再关于此轴作 180°折叠式旋转，就可以得到原来选择十二律的半音结构（见图 4.2.7，右图）。这正表明，两种选择法等价。但第二种选择法中，四度差值不再出现在黄钟律调中，而是出现在 F′律调中。同时，五度差值不再出现在仲吕律调中，而是出现在无射律调中。由此看来，四度差值之所以出现在黄钟律调中，仅仅是在《吕氏春秋》记载中所作的特定选择的结果[39]。

4.3　谐率测量工具问题

上面已经论证，所谓的中国谐和音率知识外来论，是没有具体证据的。同时也论证了中国人不但知道这些比率，而且

还能在音阶中推导出这些比率。现在转向另一个问题，考虑比率的测量。有些学者虽然认为谐和率知识在中国是独立发现的，但提出了这种发现是建立在律管上的还是建立在张紧的弦上的疑问，因为中国音阶有所谓的“四度差值”和“八度差值”，同时，中国没有早于前秦时代的弦乐器文物和碑文记载。

毫无疑问，谐律音程的发现远在音阶形成之前。因此，我们可说在用一组有序的单音字——宫、商、角、徵、羽——来表示五声音阶中的五音之前，中国音律学家一定早已掌握了某些谐和音率知识。当上下相生法发展、演变为五声音阶推算时，他们必然具体地应用了谐率。本书第3.3节、第3.4节介绍过，他们用纯五度和八度的精确谐率，构造生律方法，还对宫、商、角、徵、羽所指定的音程，推算出精确的比率。可是，李约瑟和鲁宾逊在讨论宫、商、角、徵、羽演变后，得出相反的结论：

> 因而，我们可以得出结论，到公元前4世纪，无疑使用了五音的音阶，这个音阶中用宫、商、角、徵、羽表明音的关系。然而，我们不能确切地说清这五个音的音程是什么，没有进一步的信息可以告诉我们，同一材料同一张力下五根弦的相对长度，或者相同吹力下五支竹管的具体尺寸，在周代文献中找不到确切的信息[40]。

很明显，这两位学者遗漏了《管子·地员》五音音阶的音程计算。事实上，在他们研究中国古代声学的学术研究论著中，始终没有引用过这段文献。众所周知，正是这个幸而留传至今的文献，完整地记录了关于五音音程的精确信息。

《管子》所载五声音阶推算的音程结果（见第3.3节和第

3.4 节）可总结于图4.3.1。由图可见推算音程之比率是如何按顺序分配于所定音名之间，由这些比率可得出各律音之音程。

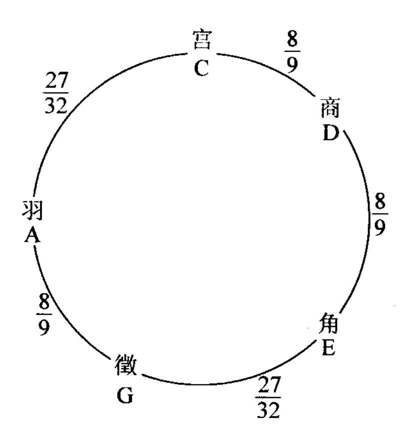


图4.3.1 《管子》用一组单音字宫、商、角、徵、羽描述五度音阶的音程结构。

图4.3.1 显示，宫—商、商—角和徵—羽音程是大二度$\frac{8}{9}$。下列几个音程是纯四度$\frac{3}{4}$：

商—徵 $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{27}{32}\right)=\frac{3}{4}$

角—羽 $\left(\frac{27}{32}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{3}{4}$

徵—宫 $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{27}{32}\right)=\frac{3}{4}$

羽—商 $\left(\frac{27}{32}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{3}{4}$

同样,下列几个音程是纯五度$\frac{2}{3}$:

宫—徵 $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{27}{32}\right)=\frac{2}{3}$

商—羽 $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{27}{32}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}$

徵—商 $\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{27}{32}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}$

羽—角 $\left(\frac{27}{32}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{2}{3}$

八度$\frac{1}{2}$则为相同字之间的音程,例如从宫到宫,由图4.3.1得到:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{27}{32}\right)^2=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^3\left(\frac{3^3}{2^5}\right)^2=\frac{1}{2}$$

由此可见,历史事实与李约瑟和鲁宾逊的说法恰恰相反,中国古代音律家精确定义了用宫、商、角、徵、羽所指定的音程。

《管子》一书,是由稷下学派弟子们在公元前4世纪才编纂完成的。此书以管仲(卒于公元前645年)而取名,一是因为管仲是齐国开国重臣,事齐桓公为相,二是因为书中收录了许多管仲时代的材料。《管子》所载五声音阶推算法,相传已久。它出现于管仲时代,也许更早些。这个问题值得进一步深入研究。

李约瑟和鲁宾逊对这些音程作探寻时提出"也许可以从考古中寻求帮助"。他们利用已测得音频的三枚出土的商代编磬(见表3.1.1和图3.1.2),试图与《吕氏春秋》三分损益法所推算出来的音阶进行比较,从而推定古代中国音程知识[41]。但是,他们的比较却建立在他们误解八度的基础之上

(见第4.2.1节和第4.2.2节)。事实上,这三枚编磬所测音频所揭示的音程结构,我们在第3.1节已经介绍过,据测定频率导出的一个比率是$\frac{8}{9}+0.018$,近似于大二度;另一个比率是$\frac{3}{4}-0.008$,极佳地接近纯四度。与商、角、徵和徵、羽、宫三度音列所指定的相吻合(见表3.1.1)。这就说明,不晚于公元前11世纪,商代音乐家就已经掌握了某些基本音程的知识。

在李约瑟和鲁宾逊著作发表之后出现的考古新进展,进一步揭示了宫、商、角、徵、羽的产生日期。众多新发现中最有意义的,应该是曾侯乙双音编钟(见图2.4.1)。编钟铭文明确地使用宫、商、角、徵、羽记录钟的音程[42],这表明,最晚到公元前5世纪,宫、商、角、徵、羽就已经建立起来了。文献资料表明,出现日期还应大大提前。据《国语》记载,公元前522年,周景王和谋士州鸠讨论把无射钟改铸成较低音律的大林钟时,曾提到过这些名词。

在振动频率的定量观念出现之前,早期声学家利用振动体的长度来处理律的定量概念。那么,中国古代声学家是不是在张紧的弦上发现谐和音率,一直是科技史学家争论的问题。许多学者主张,中国声学家是用律管长度而不是用弦长度推导出谐率知识的。理由是,没有找到早于先秦时代的现存弦乐器文物和碑文记载。此外,有关音律或音程的讨论和记载所常常提及的,不是弦器而是律管。这个问题极为重要。我们现在知道,律管共振气柱的真实长度,比管子本身长度稍稍长一点,因为空气柱的波腹点位于管子开端之外的一小段距离中[43]。因此用律管长度来确定谐和音率,会出现误差。

《诗经》和《尚书》等早期周代史料中，经常提到瑟、琴一类弦乐器[44]。《论语》也常提到瑟和琴[45]。直到1978年在曾侯乙墓中发现了乐器实物，我们才得以见到这两类公元前5世纪的弦乐器。墓中出土了12把二十五弦瑟，1把十弦琴，还有1把五弦的调音仪器（见图4.3.2）。这些弦乐器相当先进，必然经历过相当长的发展过程，调音仪器也许与韦昭说过的均钟木（见第1.1节）有关[46]。由此可见，周代文献记载的弦乐器与考古发现完全一致。因而，可以排除误认为谐率知识出现在古代中国弦乐器形成之前的种种无端猜疑。



图4.3.2　1978年在曾侯乙墓中发现的三种弦乐器。上图：五弦器（长15 cm，宽5.5～7.0 cm）；中图：十弦琴（长67 cm，宽19 cm）；下图：二十五弦瑟（长168 cm，宽43.8 cm）。

关于律管或弦器的争论中，混杂着两个不同而相关的音乐声学论题，一个是谐和音率的测定，另一个是标准律的保存。要知道，古代中国文献资料提到律管时，常常与律的标准化和标准律的保存有关，与测量谐和音率无关。无疑，张紧的弦能方便、精确地测量谐率，古代中国也利用此法测量谐率。但在张紧的弦上，是无法保存标准律的，困难在于无法保持弦的张力长期不变，尤其是在古代，这是办不到的。显然，有必要使用某种不同于弦乐器的工具，完成标准化律和保存律的任务。古代中国音律学家用律管来达到这一目的。诚然，在完成标准化律和保存律的时候，律管兼有实践上和科学上的优点，结构合理，发音稳定。律管长度和孔径一旦确定，一般情况下，律音的偏移极其微小，几乎觉察不到。一套十二律律管，可以长期保存被称为十二律音阶的标准音阶。铸钟技术成熟后，青铜编钟经常采用这组十二律音阶。

李约瑟和鲁宾逊讨论古代的律时，宣称：

> 也许要到公元前4世纪初，受到巴比伦影响之后，精确律的概念在中国才得到重视[47]。

他们这个观点建立在不正确的巴比伦东传中国假说上（见第4.1节），而且与现存记录和考古发现相矛盾（见第3.1节）。应该注意到，单有谐和音率知识，还不足以在一组律管或一套编钟中编制具有适当谐率音程的十二律音阶。要推算出十二律中的适当音程，当然需要谐和音率知识，但古代中国声学家要解决的，是怎样在律管和编钟中编制出这些音程。这可不是个简单的任务。即使有相当高明的音程知识作指导，有特定的项目任务为目标，律管和编钟十二律的编制，也

得经过一段十分漫长的发展过程,才能提炼出系统的经验编制法。尽管现存文献不多,但我们今天还是能欣赏到从公元前13世纪简单的商代钟和铙,到公元前5世纪精妙动听的曾侯乙编钟;这800年漫漫岁月中,编钟是怎样发展起来的。至于古代律管,因为用竹制作,容易腐烂,除了近年来发掘的几支战国律管残段(见第3.2节),没有标本能流传至今,供我们考查和测量,后人不得不依赖文献资料来追溯律管的发展过程。

现代声学研究揭示,虽然律管中共振气柱的长度,由于管口效应,略长于律管本身,但是两者之差对小口径律管来说,仍然是相当的微小。因此,张紧弦所测得的比率,可作制造律管相对长度的一个相当好的初步参考,拟定各律管与标准基音律管的相对近似长度。然后,再凭经验,针对各律管的特定音,作管长调整,以进一步提高精度。遗憾的是,现在找不到古代律管尺度的确切数据。现存最早十二律管的精确长度记录,出现在公元前90年的《史记》中。把表4.3.1列出的《史记》所记载的律管的长度和计算得到的长度加以比较,计算方法是,把《史记》所载音程比率与取作8.1寸的标准黄钟律管长度相乘,以得到计算长度。比较显示,律管所载长度与计算长度不同。

考核《史记》十二律音程的比率,明显可以看出,这些比率源于三分损益法(见表3.5.1黄钟列[48])。表4.3.1列出律管的所载长度与用十二律比率算出的长度不同,这个事实明确无误地表明,古代律管制作家一定知道,律管长度不能简单地用对应音的弦长来确定,因此,他们具有某些经验校正法。

表 4.3.1 《史记》所载十二律管长度与以《史记》所载十二律音程所推算出的十二律管长度比较

律名	《史记》律管长度（寸）		长度校正（寸）	计算长度（寸）	《史记》十二律音程[a] 黄钟律调		
黄钟	长八寸十分一	8.1	–	8.1	1	子	基音
大吕	长七寸五分三分一	7.533	-0.052	7.585	$\frac{2048}{2187}$	未	小二度
太簇	长七寸七分二	7.286	0.086	7.2	$\frac{8}{9}$	寅	大二度
夹钟	长六寸七分三分一[b]	6.733	-0.009	6.742	$\frac{16384}{19683}$	酉	小三度
姑洗	长六寸七分四	6.571	0.171	6.4	$\frac{64}{81}$	辰	大三度
仲吕	长五寸九分三分二	5.967	-0.027	5.993	$\frac{131072}{177147}$	亥	纯四度
蕤宾	长五寸六分三分一	5.633	-0.056	5.689	$\frac{512}{729}$	午	增四度
林钟	长五寸七分四	5.571	0.171	5.4	$\frac{2}{3}$	丑	纯五度
夷则	长五寸四分三分二	5.167	0.110	5.057	$\frac{4096}{6561}$	申	小六度
南吕	长四寸十分八[c]	4.800	–	4.8	$\frac{16}{27}$	卯	大六度
无射	长四寸四分三分二	4.467	-0.028	4.495	$\frac{32768}{59049}$	戌	小七度
应钟	长四寸二分三分二	4.267	–	4.267	$\frac{128}{243}$	巳	大七度

a. 《史记》给出的小二度为$\frac{1024}{2187}$，小三度为$\frac{8192}{19683}$，纯四度为$\frac{65536}{177147}$，比上面列出的高一个八度。

b. 校正之前，夹钟律管长度这一项为六寸一分三分一。

c. 校正之前，南吕律管长度这一项为四寸七分八。

现代声学指出，在标准环境下，一支两端开口的无节律管(nodeless pitch-pipes)，长度 l_n，孔径 d_n，它的基频 f_n 是：

$$f_n = \frac{v}{2(l_n + 0.58d_n)} \tag{4.1}$$

这里，v 是声音在空气中的传播速度(在20℃空气中 $v = 343$ 米/秒)。以 $n = 1,2,\cdots,12$ 为下标，表示十二支律管的升序。那么，由公式(4.1)可得到一支长度 l_1(8.1 寸)、孔径 d_1 未定之黄钟律管的基频 f_1：

$$f_1 = \frac{v}{2(l_1 + 0.58d_1)} \tag{4.2}$$

《史记》所记载的黄钟十二律，给定大吕律和黄钟律之间的音程为小二度，比值为$\frac{2048}{2187}$。这样，大吕律频率 f_2 能够用黄钟律表示如下：

$$f_2 = \frac{f_1}{\gamma_2} = \frac{v}{2\gamma_2(l_1 + 0.58d_1)} \tag{4.3}$$

这里，$\gamma_2 = \frac{2048}{2187}$。同时，由公式(4.1)大吕律管的基频也能利用它的长度 l_2 和孔径 d_2，表示为公式：

$$f_2 = \frac{v}{2(l_2 + 0.58d_2)}$$

因而有：

$$\frac{v}{2(l_2 + 0.58d_2)} = \frac{v}{2\gamma_2(l_1 + 0.58d_1)}$$

得大吕律管和黄钟律管尺度的具体关系：

$$l_2 = \gamma_2 l_1 + 0.58(\gamma_2 d_1 - d_2) \tag{4.4}$$

以此类推，得到黄钟律管和十二支律管中任何一支尺度的一般关系：

$$l_n = \gamma_n l_1 + 0.58(\gamma_n d_1 - d_n) \tag{4.5}$$

这里,γ_n是十二律的音程比率,$n = 1,2,\cdots,12$(见表4.3.1)。

上述推导和公式(4.5)表明,律管长度的管口校正公式是:

$$\Delta l_n = l_n - \gamma_n l_1 = 0.58(\gamma_n d_1 - d_n) \qquad (4.6)$$

假定所有十二支律管的孔径都相等,即对 $n = 1,2,\cdots,12$,有 $d_1 = d_n$,那么,管口校正公式还可以简化为:

$$\Delta l_n = -0.58(1 - \gamma_n) d_1 \qquad (4.7)$$

由于 $\gamma_n < 1$,管口校正数应该都是负值。但表4.3.1没有显示出这种情况。因此,我们可以认定,《史记》所提到十二支律管,孔径并不相同。

基于出土编钟十二律的精确程度,一个合理的推测是,《史记》所记载的十二律管的音律应该更为精确,因为相对来说,律管不但构作比较容易,而且凭经验用听觉调节也比较方便。如果情况确实如此,管口校正公式(4.6)能供我们探索《史记》所载律管的孔径,因为要计算十二律管的孔径,必须知道的只是十二个孔径中的任何一个。现在假设大吕律管和黄钟律管之间的音程精确地复制了比率 $\gamma_2 = \frac{2048}{2187}$,而且两律管的孔径相等,即 $d_2 = d_1$,根据 $\Delta l_2 = -0.052$ 寸(见表4.3.1),由公式(4.6)可求得 $d_2 = d_1 = 1.4$ 寸。这个 d_1 值是黄钟律管孔径的一个合理估计。

表4.3.2列出的由管口校正的管长差(见表4.3.1)和根据公式(4.6)所算得的十二律管孔径,为了比较,表中列出五种不同黄钟律管孔径 d_1 值的推算数据。可见,如果 $d_1 = 1.4$ 寸,十二律管的孔径在1.4寸到0.64寸的范围内。简略说来,这些在《史记》中有长度记载的律管孔径,随着律管音律的升高,呈下降趋势。

表 4.3.2 《史记》所载十二律管的管口直径研究

律名	长度（寸）	长度校正（寸）	直径（寸）	直径（寸）	直径（寸）	直径（寸）	直径（寸）	十二律音程
黄钟	8.1	-	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	基音
大吕	7.533	-0.052	1.03	1.21	1.40	1.59	1.78	小二度
太簇	7.286	0.086	0.74	0.92	1.10	1.27	1.45	大二度
夹钟	6.733[a]	-0.009	0.85	1.01	1.18	1.35	1.51	小三度
姑洗	6.571	0.171	0.50	0.65	0.81	0.97	1.13	大三度
仲吕	5.967	-0.027	0.79	0.93	1.08	1.23	1.37	纯四度
蕤宾	5.633	-0.056	0.80	0.85	1.08	1.22	1.36	增四度
林钟	5.571	0.171	0.37	0.51	0.64	0.77	0.91	纯五度
夷则	5.167	0.110	0.43	0.56	0.68	0.81	0.93	小六度
南吕	4.800[b]	-	0.59	0.71	0.83	0.95	1.07	大六度
无射	4.467	-0.028	0.60	0.71	0.83	0.94	1.05	小七度
应钟	4.267	-	0.53	0.63	0.74	0.84	0.95	大七度

a. 校正之前，夹钟律管长度这一项为六寸一分三分一，即 6.133 寸。

b. 校正之前，南吕律管长度这一项为四寸七分八。

有些科学史学家认为，十二律的古代律管的管孔径都相等。尽管这个假定也有道理，但在古代，这种做法实际上并不方便，古代律管不是机械产品，只能利用天然竹子，改变竹管长度要比寻找十二根孔径精确相等的竹管容易。何况即使孔径相等的竹管，管口校正仍然需要依靠经验，凭听觉修改每一支律管的管长。第 4.1.5 节讲过，《吕氏春秋》提到伶伦寻竹制律，对竹管的要求是“以生空窍厚钧者”，就是要求竹管两端孔径相同、管厚统一，但是没有提到管孔径尺度。古代律管并不一定采用同样孔径，这已被上述 1986 年出土的战国律管残段所证实（见第 3.2 节）。从这些律管残段得悉，律管用无节竹子制作，两端开口，长度和孔径各不相等。测量表明，四

支律管中两支的孔径为0.6厘米和0.7厘米(见表3.2.1)。

4.4 半音的处理

为与古希腊方法相比较,李约瑟和鲁宾逊这样评论中国对半音的处理:

> 希腊人用音程作他们音阶结构的基础,把一个八度划分成一个全音和两个四度音列,再把一个四度音列划分成两个全音和一个毕达哥拉斯半音,或称迪西斯(diesis)。中国人并没有涉及古希腊大半音(apotomē)和小半音(leimma)较复杂的研究,仅仅从其基本律音(即上述黄钟律)进展了两步,从而推算其音列中的第四音,把第三音的共振体长度乘以$\frac{2}{3}$,得到基音长度的$\frac{16}{27}$。[49]

所谓"中国人并没有涉及古希腊大半音和小半音较复杂的研究"的说法,值得商榷。

大多数声学史学者认为,现在称之为毕达哥拉斯音调(Pythagorean intonation)的七声音阶,是继承毕达哥拉斯的成就,源于他最早发现由简单整数比所形成的谐率。但是,这整个的发展过程,由谐率的发现到音阶的形成,并没有适当的历史资料。现存有关音阶内容最早的一段记录,出现在被认为是菲洛劳斯(Philolaus,约公元前5世纪)的残卷中。译文如下:

> 八度的内容是大四度和大五度,五度比四度大一个全音。因为,四度从最高弦到中间弦,五度从中间弦到最低弦。在中间弦和第三弦之间是一个全音。大四度的比为4:3,五度3:2,八度2:1。这样,八度中有五个全音和

两个半音，四度有两个全音和一个半音[50]。

根据这段文字可推算出，全音音程是$\frac{8}{9}$，半音音程是$\frac{243}{256}$。同时，由所述琴弦上音的配置可以得出结论：一个八度在此分成五个全音和两个半音。这就是说，八度满足数学关系式：

$$\left(\frac{8}{9}\right)^5\left(\frac{243}{256}\right)^2=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^5\left(\frac{3^5}{2^8}\right)^2=\frac{1}{2} \qquad (4.8)$$

由此看来，毕达哥拉斯音阶的八度由全音和半音构成。但是这段文字没有指明音阶的音序，因为在八度上半部分和下半部分中，都没有确定全音和半音的次序。

考察《管子》以上下相生法所推算出来的五声音阶音程（图3.3.1），可见五声音阶划分八度为三个全音$\left(\frac{8}{9}\right)$和两个小三度音$\left(\frac{27}{32}\right)$。八度中的数学关系是：

$$\left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{27}{32}\right)^2=\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^3\left(\frac{3^3}{2^5}\right)^2=\frac{1}{2} \qquad (4.9)$$

与式(4.8)所表达的毕达哥拉斯音阶八度相比，五声音阶八度的显著特点是没有半音。在两个半音的位置上，出现两个小三度音程。然而，五声音阶的小三度之所以没有进一步划分为一个全音和一个半音，仅仅是个选择问题，与是否因为处理了半音而更为复杂，根本没有任何关系。中国古代很早就出现了半音和七声音阶[51]。

当六律系统利用间隔律，把全音分成半音，再扩大到十二律系统时（见第1.1节），半音的观念已经深深扎根于古代中国音律之中。当利用三分损益法推导出十二律的时候，半音的处理在理论上已经非常成功。三分损益半音音阶的基本结构是把全音细分为两个半音：一个大半音和一个小半音，如同

公式(3.1)所表示：

$$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)=\left(\frac{3^5}{2^8}\right)\left(\frac{2^{11}}{3^7}\right)=\frac{8}{9}$$

这里的大半音与上述被认为与菲洛劳斯残卷中所谓的半音(hemitone)是一样的。小半音是否出现于古希腊音阶中，目前尚无适当的历史资料加以证实。

毕达哥拉斯七声音阶中共有五个全音[见式(4.8)]，如果把这五个全音全都分成这样的两个半音，那么一个八度有五个大半音和七个小半音：

$$\left(\frac{243}{256}\right)^7\left(\frac{2048}{2187}\right)^5=\left(\frac{3^5}{2^8}\right)^7\left(\frac{2^{11}}{3^7}\right)^5=\frac{1}{2} \qquad (4.10)$$

这正是中国三分损益十二律音阶的八度与半音的关系[见公式(3.2)和图3.5.2]。正由于这个原因，中国十二律音阶包含毕达哥拉斯音调(见表4.2.1)，毕达哥拉斯七声音阶出现在七个十二律律调中。由此可见，无论小半音是否出现在古希腊音阶中，李约瑟和鲁宾逊所谓“中国人并没有涉及古希腊大半音和小半音较复杂的研究”的说法，已明确被否定。

4.5 中国音阶推算法的估价

李约瑟和鲁宾逊在分析中国古代上下相生法(up-and-down method of generating scales)时，作过如下评论和比较：

> 毕达哥拉斯音阶的数学，远远比中国音列算法来得复杂，它需要平均值知识。这个由柏拉图(Plato)提出的观念来自形而上学的考虑，而不是来自音乐上的考虑。欧几里得作了一个比较全面的描述。
>
> 另一方面，中国音列只需要最简单的数学运算，并不

用八度起算。确切地说,它甚至完全不包含纯八度。唯一的数学运算,只是对某些数交替地乘上$\frac{2}{3}$或乘上$\frac{4}{3}$。[52]

本节将对中国音阶推算法再作一评价。

4.5.1　三分损益法的实质

第3.3节、第3.4节和第5.1节已经显示,古代中国推导音阶的基本方法是使用一个谐率,导生音阶的个别律音,并利用八度音程,以上下相生原理调节所导生律音的八度关系,保证不超越预定的八度范围。《管子》、《吕氏春秋》所用的生律谐率都是纯五度。在此值得进一步分析一下,推导音阶的基本原则和考察谐率应用的选择,当然这也是很有启发性的。

在数学上,具有十二个有序元素的群,只有四个生成数1、5、7和11,能按某种运算导生群中所有的元素[53]。以生成数1、5、7和11分别对应小二度、纯四度、纯五度和大七音。这意味着,在能生出八度中十二个音的若干种演算方案中,纯五度仅仅是四个可能音程中的一个。

用小二度(对应于生成数1)导生十二个律音,是一种逐个生律法,生出的十二个律音按升序排列:先是基音,生小二度,到大二度,再是小三度,等等。用大七度(对应于生成数11)导生十二个律音,也是一种逐个生律法,不过方向相反,十二个律音按降序排列:先是基音,生大七度,到小七度,再是大六度,等等。显然,导生八度中十二个律音的这两条生律途径相互关联。两个生律方案尽管在数学上说得通,但是在实践上,特别在古代,操作起来很困难,因为需要预先知道个别

半音的音程。

剩下的两条途径(对应于生成数 5 和 7),只需要纯四度或纯五度的谐率知识,古人早就精确地知晓这两个谐率。图 4.5.1 展示这两条生律途径的导生模式。对应于生成数 7 的导生模式,如图 4.5.1 左图所示,与《吕氏春秋》三分损益法完全一致(见第 3.5.1 节)。这正是所预料的,因为《吕氏春秋》所用的谐率正是纯五度。饶有趣味的是对应于生成数 5 的生律途径,如图 4.5.1 右图所示,纯四度生律途径恰恰与用纯五度生律途径相反。值得研究的是用纯四度以上下相生原理所推算出来的十二律音阶。

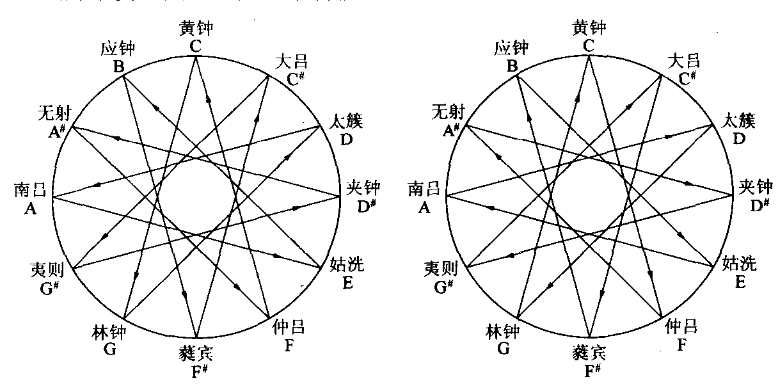


图 4.5.1　十二律八度导生模式的比较,左图用纯五度,右图用纯四度。

要把上下五度相生法改成上下四度相生法,只要在下生中,把纯五度音程$\frac{2}{3}$换成纯四度音程$\frac{3}{4}$;在上生中,把$\frac{4}{3}$换成$\frac{3}{2}\left(即\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$。[54]按照上下相生原理和图 4.5.1 所示的导生次

序，不难以四度推算出十二律音。如图4.5.2所示，上生用因子$\frac{3}{2}$，下生用因子$\frac{3}{4}$，即可用上下四度相生法推导出半音音阶。

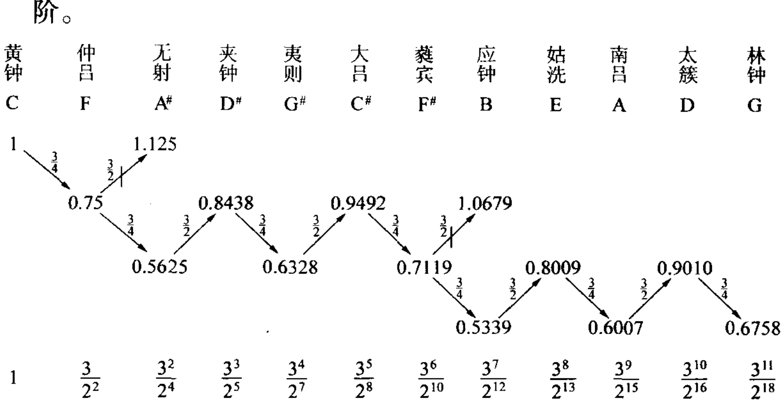


图4.5.2　上下四度相生法导生半音音阶的生律过程，采用《管子》、《吕氏春秋》上下相生原理。

这样所得的半音音阶，在理论上应该与以纯五度所得的音阶相似，图4.5.3比较以四度所得的半音结构（见左图）和以五度所得的半音结构（见右图）。如图八度圆所示，两者之间唯一区别在于：应钟律、黄钟律之间半音音程安排，与黄钟律、大吕律之间的半音音程安排，彼此相对。若把通过黄钟和蕤宾的一条直线，作为对称轴，折叠式旋转180°，右图半音结构能变成左图的半音结构，反过来也是如此。这就证明，两种半音结构等价。利用纯四度和纯五度所生出的两个音阶结构，尽管音律名称排列不同，事实上具有相同的总体结构。

以上对古代中国音律系统导生法的分析，表明上下相生原理是一个普遍性的原理。尽管生律过程简单，只需“最简单的数学运算”，但符合数学的分析。值得在此提出的是，上

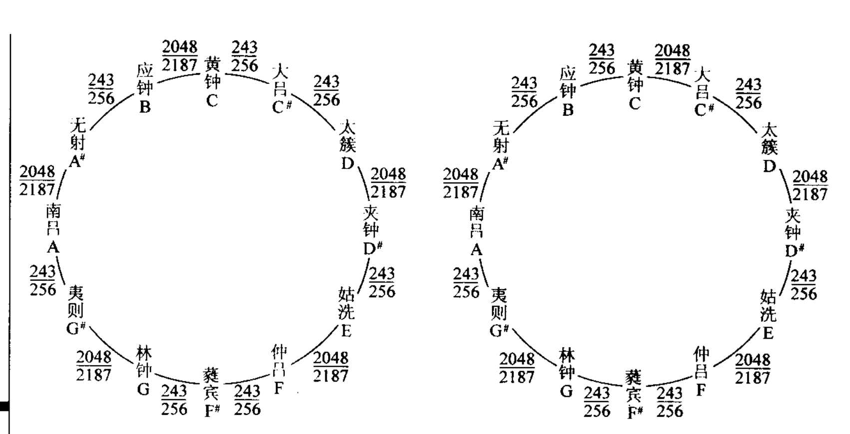


图 4.5.3　半音音阶八度圆的半音结构，左图用上下四度相生法，右图用上下五度相生法。

述十二律的四个生律途径，中国律学界最迟在 16 世纪就已经正确掌握。朱载堉为证明他所创制等比律的“循环无端”特性，提供了“相生有四法”的分析(见第 5.2.2 节)

古代中国音乐家对十二律的重视，部分原因是为了旋宫转调，尤其是五声音阶调式的转换功能。例如，在《左传》和《吕氏春秋》中见到这样的陈述：

> 七音，六律，以奉五声。
> 【释文：七声音阶和六律音阶，为了辅助五声音阶。】

> 铸十二钟以和五音。
> 【释文：铸造十二律编钟以便调和五音。】

这些话表明，古代中国音乐家偏重于五声调式的变移。《吕氏春秋》三分损益十二律是一个二比律音律系统，由大小

两种半音所组成,对调式转换有一定容纳性。在16世纪等比律出现之前,享有最佳转调功能的音律系统,实在是最佳"非等比"平均律(见第5.4.1节和第5.4.3节)。

除了转调多功能性外,《吕氏春秋》十二律音阶中还保存着某种纯律的谐率。考察表3.5.1可知,组成这音阶的音程比率,精确程度各不相同,可分为两组。表4.5.1分别列出这两组音程以作比较。

表4.5.1 按上下五度相生法生成的《吕氏春秋》半音音阶的音程分析

第一组		第二组 A		第二组 B
基音	1	小二度	$\frac{243}{256}$	$\frac{2048}{2187}=\frac{15}{16}-\frac{37}{34992}$
大二度	$\frac{8}{9}$	小三度	$\frac{27}{32}$	$\frac{16384}{19683}=\frac{5}{6}-\frac{37}{39366}$
	$\frac{59049}{65536}=\frac{8}{9}-\frac{7153}{589824}$	大三度	$\frac{64}{81}$	$\frac{6561}{8192}=\frac{4}{5}+\frac{37}{40960}$
纯四度	$\frac{3}{4}$	增四度	$\frac{512}{729}$	$\frac{729}{1024}=\frac{32}{45}+\frac{37}{46080}$
	$\frac{131072}{177147}=\frac{3}{4}-\frac{7153}{708588}$	小六度	$\frac{81}{128}$	$\frac{4096}{6561}=\frac{5}{6}-\frac{37}{52488}$
纯五度	$\frac{2}{3}$	大六度	$\frac{16}{27}$	$\frac{19683}{32768}=\frac{3}{5}+\frac{111}{163840}$
	$\frac{177147}{262144}=\frac{2}{3}+\frac{7153}{786432}$	小七度	$\frac{9}{16}$	$\frac{32768}{59049}=\frac{5}{9}-\frac{37}{59049}$
八度	$\frac{1}{2}$	大七度	$\frac{128}{243}$	$\frac{2187}{4096}=\frac{8}{15}+\frac{37}{61440}$

表中第一组包括大二度、纯四度和纯五度。除极少数例外,这些音程比率都相当精确,例外的是黄钟律调的四度、无射律调的大二度及仲吕律调的大二度和五度(见表3.5.1)。

表4.5.1第二组比率是近似值。A列近似值不仅在中国文明中(见表3.5.1),也可以在其他的许多古代文明音阶中找到。B列中的近似值并不如此普遍,但是与纯律的谐率相

比,可以说相当精确。事实上,这些比率与纯律的偏差,小到如此程度(小于千分之一),在实践操作上是没有意义的。这样说来,在《吕氏春秋》的半音音阶中,仍然蕴藏着十分近似纯律的五声音阶(诸如林钟—宫律调,表3.5.1)和七声音阶(诸如夹钟—宫律调,表4.2.1)。

4.5.2 曾侯乙编钟的角—曾法

第3.5节讨论过古代中国推导半音音阶的方法,在第3.5.2节中叙述了由曾侯乙钮钟铭文所推出的角—曾法。此法用徵、羽、宫、商这四个五度音作为核心音,由角音程和曾音程导生八个音,形成十二律半音音阶,这种独特设计,便于插入附加的和声音程以求得纯律。核心音和插入音程的挑选,完全不是任意的(图4.5.4)。古代中国利用这方法成功地导出了纯律半音音阶,确实是音律学史上一项极重要的成就。图4.5.4左图展示利用《管子》五度相生法推导四个核心音

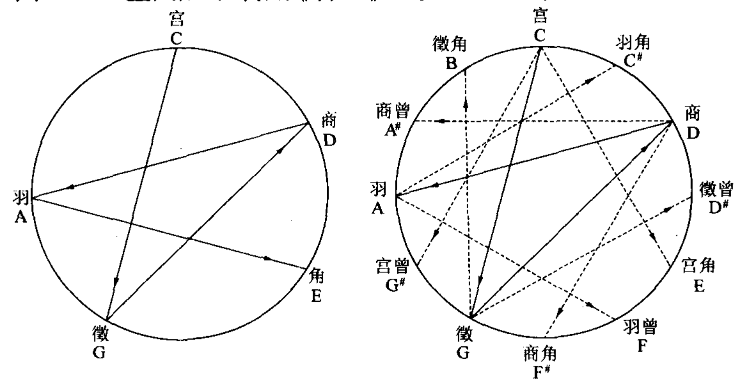


图4.5.4 左图中实线表示八度圆中的核心音生律过程,右图中虚线表示八度圆中附加的八个音的生律过程。

的生律过程,右图展示用角、曾音程推导八个音的生律过程。为方便起见,图中没有标出四个核心音和八个插入音程之间所用的比值。

为了进一步理解角一曾法的核心音和插入音程的选择,分析一下图4.5.4右图所示生律过程的八度圆。生律过程中的对称关系,经过如图4.5.5所示的折叠式旋转后,变得一目了然。图中所示的对称关系表明,核心音和插入音程的选择都是唯一的,令人赞叹。古代中国声学家肯定没有掌握这种对称分析法,然而正是图4.5.5所显示的隐含对称,使得此法中角音程和曾音程的选择,有利于推导纯律音阶。

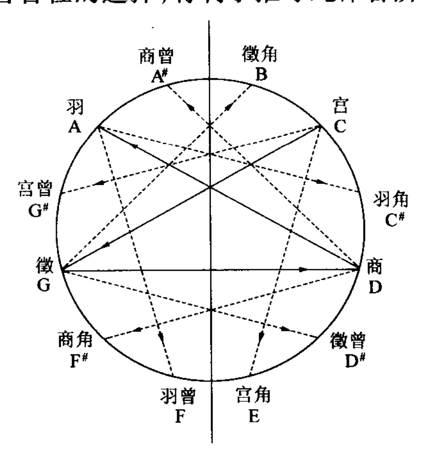


图4.5.5　曾侯乙钮钟半音音阶的音程结构隐含的轴对称性质。实线表示核心音生律过程,虚线表示附加八个音的生律过程。

不能不注意到,尽管纯律令人愉悦,但是纯律半音音阶包含着四个不同的半音,与只有两个不同半音的《吕氏春秋》半音音阶相比,纯律音阶在旋宫转调适应功能上,的确没有后者

灵活。然而,前者的愉悦性能和后者的转调功能,正是听觉美感与乐理需要相互竞争的因素。它们在推动调节音阶的发展上,起着极重要的作用(见第5章)。历史已经证明,旋宫转调的需求最终导致了音阶中音程的调节。曾侯乙编钟提供了一个可体会这种趋势的早期实例。甬钟音程结构揭示了音程调节的尝试,出现了使用小三度之类的不同音程由五度核心音推导音阶的步骤。然而,追求能适应转调的和谐音阶体系,自由大小两种半音所组成的二比律音律系统,到由一种半音所组成的等比律音律系统,要经过两千多年才得到一个数学解。朱载堉在1584年发表了他以理论推导出来的十二等比律(见第5.2.1节)。纯律和三分损益二比律再加上等比律形成了音律学的三大律制体系。这三个律制的比较在第5章再作介绍(见图5.2.3和表5.4.1)[55]。

同时值得提及的是,不管后世对旋宫转调兴趣如何增减,也不论今后和声学发展的方向如何,作为音律学的一个基本律制体系,纯律将永垂不朽。曾侯乙编钟所揭示的导生纯律半音音阶的角—曾法,是中国声学界早期的另一个重要的声学成就。

第二编

中国 16 世纪声学成就

声学发展到 16 世纪,出现了重大突破,导出了等比律,解开了音律史上千余年来的难题。本章在第 5.1 节先简要回顾相关的音律史实,考察朱载堉(1536～1611)的突破性成就。在第 5.2 节和第 5.3 节,分别分析十二等比律的推导过程,以及等比律律管的构作法。最后在第 5.4 节加以评论和评价[1]。



5 等比律的发展

5.1 历史的回顾

人们早就发现,谐和音程最为悦耳。然而由谐音组成的纯律音阶(又称自然音阶),却具有四种不同的半音(见第3.5.2节),容纳调式变移的能力极其有限。为满足音乐旋宫转调的需要(见第3.2节),古代采用了不同的律制,创造了多种音阶体系,但是未能完全解决调式变移时的和谐问题,也未能达到转调的全面灵活性。于是,追求能适应转调的和谐音阶体系逐渐成为音律学的一个主题。事实上,“纯律”和“转调”,如同“鱼”和“熊掌”一样,两者不可兼得。音律学上,为达到乐理多样性,选择了舍“纯律”而取“转调”的做法。早在先秦时代,就有调节谐和音程来改进音阶转调功能的趋势。公元前433年曾侯乙编钟(见图2.4.1)中,一些甬钟之间的音程调节,就是典型的例子[2]。这个措施的目的,是用调节谐和音程所得的音差,来换取音阶的转调功能。近代音响心理学发现,人耳的听感对微小音差有一定的容忍性,在此限度之内,的确存在着音差空隙,可以换取音阶的转调功能。由此可见,古人对听感的直觉感受是正确的。

古代中国采用纯五度,作为推算音阶律音的主要谐和音率,本书第3.3节和第3.5节所述《管子》和《吕氏春秋》所载的三分损益相生法,就是如此。近代称它为上下五度相生法,

就是为了说明这种五度关系。用纯五度推导音阶时，必须注意八度处理要恰当，否则会出现最大音差（即$\frac{524288}{531441}$，见第3.5节）。如果音阶的八度处理适当，所得音阶，虽然个别律音中还会出现音差，但减少了所得音阶中的半音种类，从而能通过调节谐和音程所得的音差，成功地换取音阶的转调功能。

三分损益相生法的"损益"或上下五度相生法的"上下"，就是处理八度的标志（见第3.4节）。它的作用在于，在推算律音时，选择适当的八度音域范围，可以避免出现最大音差（见图4.2.4）。由此得到《吕氏春秋》所载的三分损益十二半音音阶。在三分损益音律体系中，虽然个别律音含有小音差（见表4.2.1），但决不会出现最大音差，那就是等于把最大音差成功地分配到个别律音中。更重要的是，这个体系是一种二比律体系，只含大小两种不同的半音（见第3.5.1节）。它与含有四种半音的纯律体系相比，大大增强了调式变换的容纳能力。三分损益的二比律音律体系，是声学界最早的一个重要平均律的成就（见第5.4.3节）。

西方人也用纯五度推算音阶，他们推导的方法是五度旋生（spiral of the fifths），不免会出现最大音差，通常称为毕达哥拉斯音差[3]。最大音差的出现，不仅影响到音阶律音的谐和，而且影响到音阶转调的功能。不迟于15世纪，风琴键盘上出现五个黑键，把八度中的五个全音分为十个半音[4]，从而把七音律推广到十二音律，同时也把最大音差牵涉到调谐风琴的问题上。西方处理最大音差问题的措施是均分音差，企图把最大音差分布到个别音程上（见第5.4.1节）。但在相当长时期中，没有获得明显的成功。公元1577年，萨里纳斯（Salinas）以均分音差概念制作中音调律（mean-tone temperament），在16世纪到17世纪中兴盛一时，可惜它的容纳转调

的功能，仍然远远比不上三分损益的二比律体系[5]。

由于处理最大音差的问题，西方寻求增强音阶转调功能的方法，在思路上与中国人有所不同，西方的思路纠缠于如何把最大音差分布到个别的律音上[6]。而在中国，最大音差问题如果真出现过，那么最迟到公元前 239 年就已经解决[7]，整个三分损益音律体系只由两种半音组成，一个是大半音$\frac{2048}{2187}$，另一个就是小半音$\frac{243}{256}$。因此，要增强音阶的转调功能，所涉及的仅仅是这两种半音的均分，并分析这两种半音的排列与各调律的关系。最终，为了追求增强音阶转调功能，中国人摸索出一条新的思路。

我们首先要注意，三分损益二比律音阶体系里，无论哪一律哪一调式，每一个音程都必须用这两种半音组成。以大三度为例，音阶体系中有二个率数据，即$\frac{64}{81}$和$\frac{6561}{8192}$（见表 3.5.1）。大三度率$\frac{64}{81}$出现于八个调律中，由两个大半音$\frac{2048}{2187}$和两个小半音$\frac{243}{256}$组成（见表 5.1.1），比纯律大三度率$\frac{4}{5}$略高，$\frac{64}{81} = \frac{4}{5} - \frac{4}{405}$。大三度率$\frac{6561}{8192}$出现于其余四个调律中，由一个大半音$\frac{2048}{2187}$和三个小半音$\frac{243}{256}$组成（见表 5.1.2），比纯律大三度率$\frac{4}{5}$略低，$\frac{6561}{8192} = \frac{4}{5} + \frac{37}{40960}$。因为每一个调式都有其特殊的音程排列，所以每一次转调，相当于一次循环操作，由音阶的一个排列转变到另一个排列。因而每一次转调，各音程随之置换其大半音和小半音的排列。表 5.1.1 和

表 5.1.1　三分损益音阶体系中大三度$\frac{64}{81}$的大半音与小半音的排列

调律	大半音与小半音的排列置换
黄钟	$\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$
大吕	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)$
太簇	$\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$
姑洗	$\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)$
蕤宾	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)$
林钟	$\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$
南吕	$\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)$
应钟	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)$

表 5.1.2 列出组成大三度的大半音和小半音在各调律中的排列置换(见图 3.5.2 和表 3.5.1)。

表 5.1.2　三分损益音阶体系中大三度$\frac{6561}{8192}$的大半音与小半音的排列

律调	大半音与小半音的排列置换
夹钟	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$
仲吕	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$
夷则	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$
无射	$\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{243}{256}\right)\left(\frac{2048}{2187}\right)\left(\frac{243}{256}\right)$

由表 5.1.1 可见,略高的大三度,虽然组合半音的排列并非一模一样,但在八个律中的转移是可以容纳的。同样,由表

5.1.2 可见,略低的大三度可以在四个律中转移。这就表明,可以从循环对称的角度,分析旋宫转调问题。从这个角度出发,一个可容纳的转调相当于等势循环的一次操作,因此,转调问题就变成为,一次循环操作是否等势对称的问题。

从循环角度出发来分析旋宫转调,是朱载堉的新思路。《吕氏春秋》三分损益音阶的八度含有七个小半音和五个大半音[见公式(3.2)],显然没有全面循环对称性,不能满足所有转调的需要。朱载堉对三分损益音阶的批评,正是抓住了十二半音在八度之间循环对称性的这个实质。他认为"旧法往而不返者,盖由三分损益算术不精所致也"。他所追求的新律,要求它的十二个半音能"终而复始"地在八度之间循环,达到"或左旋或右旋,皆循环无端也"(见第 5.2.2 节)。换句话说,新律的八度应该具有全面等势对称的循环性。因为只有这样的八度,才能"循环无端"地实现转调的全面灵活性。因此,朱载堉着手研究,如何推算含有十二个相等半音的八度。下一节我们分析朱载堉等比律的推导[8]。

5.2 朱载堉的等比律

1584 年,朱载堉迈出了声学史上突破性的一步,成为第一个建立等比律制和创制等比律管的科学家,他的成果发表在《律学新说》一书中[9]。本节考察朱载堉等比律的推导过程[10]。

5.2.1 等比律的推导

朱载堉发现,只有当八度之间每一个十二半音的比率相

等时，才能得到全面等势对称的循环性，满足转调全面灵活性的需要。为了建立八度顺序的等比数列关系，朱载堉利用了方圆相切图中圆直径与方边长的等比关系。他说：

> 新法筹律与方圆，皆用勾股术[11]。
>
> 【释文：新法利用相切方圆［直径与边长的等比关系］筹备作律的推算，算法建立于勾股术。】

推算相切的方与圆之间圆周与方匝的关系，本来就是中国古代数学中的一项重要成就。方圆术最早出现在《周公问商高》一篇对答文中，此文因编集于《周髀算经》中而留传至今。

图5.2.1是《周髀算经》的圆方图和方圆图[12]，反映出圆周与方匝的数理关系。图5.2.1右边的方圆图表明，圆周长小于外切正方形的周长（设圆的直径为1尺，即得方匝4尺），图5.2.1左边的圆方图表明，这个圆周同时也大于内接正方形的周长（即方匝$2\sqrt{2}$尺）。原法称作“此方圆之法”，说明这确实是当时推算圆周率的方法。图5.2.1的数理内容可用现代符号表示如下：

$$2\sqrt{2} < \pi < 4$$

这应当就是商高时代取圆周率π为三的数理依据[13]。

图5.2.1的圆方图（左）指出，圆直径d与其内接正方形边长a的关系是：$d = \sqrt{2}a$。这个关系启示了朱载堉一个推算八度与半八度之间比率的方法。朱载堉说：

> 度本起于黄钟之长，即度法一尺。命平方一尺为黄钟之率。东西十寸为勾，自乘得百寸为勾幂；南北十寸为股，自乘得百寸为股幂；相并共得二百寸弦幂。乃置弦幂

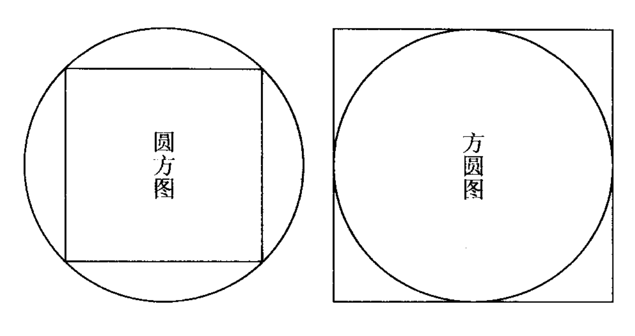


图 5.2.1 《周髀算经》宋代嘉定刊本的圆方图和方圆图。

为实,开平方法除之,得弦一尺四寸一分四厘二毫一丝三忽五微六纤二三七三〇九五〇四八八〇一六八九,为方之斜,即圆之径,亦即蕤宾倍律之率[14]。

【释文:律的度量取决于黄钟的长,因此,度量之法是以(定为黄钟之长的)1尺作为律的起度。令一尺方矩边长为黄钟律长。设东西边长10寸为勾,平方得勾面100平方寸;设南北边长10寸为股,平方得股面100平方寸;两面相并得弦面200平方寸为实。开平方根得弦1.414213562373095048801689尺,为方矩的对角线,这就是外接圆的直径,其数据也就是蕤宾律低八度的率。】

这里的数据1.414213562373095048801689,是朱载堉计算$\sqrt{2}$精确到25位的有效数字[15]。

朱载堉的这段文字说明,在圆方图(见图5.2.1左图)所示几何关系上,设方矩边长一尺相应于黄钟律,则其外接圆的直径$\sqrt{2}$尺,可以用来确定相应新律的蕤宾倍律。然而,这个外接圆直径,如方圆图(见图5.2.1右图)所示,正等于外切方矩的边长。朱载堉注意到,这种相联的几何等比关系,正可以

应用到相联的八度和半八度的音律关系上。如果把图 5.2.1 圆方图与方圆图重叠在一起,改用现代符号,得到的内外相切方圆的兼容网图,如图 5.2.2 所示。

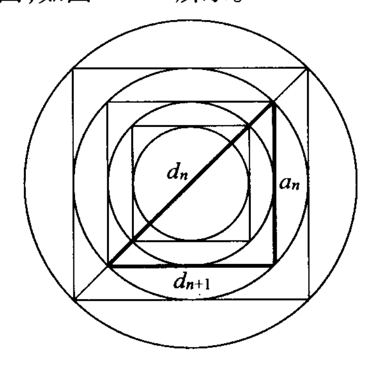


图 5.2.2　内外相切方圆的相容网络及直径 d_n 与边长 a_n 的关系示意图。

在图 5.2.2 所示内外相切圆方所构成的网格图案中,圆直径 d_n 和方边长 a_n 之间的等比关系,构成了等比数列,这些等比数列以现代符号可表达如下:

$$d_n = \sqrt{2} d_{n+1}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

$$a_n = \sqrt{2} a_{n+1}, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

这里,圆直径 d_n 和相应内接方边长 a_n 的关系如下:

$$d_n = \sqrt{2} a_n, \quad n = 1,2,3,\cdots。$$

在新律推导过程中,朱载堉充分利用了这些等比数列。他把圆直径 d_n 和方边长 a_n 等比数列,相应于音阶八度和半八度的律音序列,作为推算八度之间其他半音的数值框架,如表 5.2.1 所示。

表5.2.1　直径 d_{n+1} 和边长 a_n 等比数列相应音阶八度和半八度音程序列

n	a_n(尺)	d_{n+1}(尺)	音程序列	律层
1	2	2	浊黄钟(八度)	黄钟倍律层
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	浊蕤宾(半八度)	
3	1	1	黄钟(八度)	黄钟正律层
4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	蕤宾(半八度)	
5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	清黄钟(八度)	黄钟半律层
6	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	清蕤宾(半八度)	
7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	清清黄钟(八度)	

数列取 $a_1 = 2$ 尺起算。

表中,把朱载堉取为1尺的黄钟相应边长,定为 a_3(即直径 d_4,因为 $d_4 = a_3$),那么所得蕤宾倍律的相应直径 $\sqrt{2}$ 尺就是 d_3(即边长 a_2,因为 $a_2 = d_3$)。

要用音阶的八度和半八度序列分析,首先约定黄钟直径 $d_4 = 1$ 尺和蕤宾边长 $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 尺的相切圆方层,就是黄钟正律层。依此类推,黄钟正律层的隔外层是黄钟倍律层(即低八度层),此层浊黄钟的相应直径为 $d_2 = 2$ 尺,浊蕤宾的相应边长为 $a_2 = \sqrt{2}$ 尺。黄钟正律层的隔内层是黄钟半律层(即高八度层),此层清黄钟的相应直径为 $d_6 = \frac{1}{2}$ 尺,清蕤宾的相应边长为 $a_6 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 尺。于是,可以得到其他所有高、低八度的律层。尽管各项之比只涉及半八度音程(含有六个半音),但

毕竟构成了等比数列。由此,朱载堉成功地借用几何关系,建立了推算八度之间其他半音的数值框架。

下一步,朱载堉分割从蕤宾律到黄钟律的半八度音程,成为等比的四分八度,从而确定新律的南吕律。朱载堉说:

> 以勾十寸乘之,得平方积一百四十一寸四十二分一十三厘五十六毫二十三丝七十三忽〇九五〇四八八〇一六八九为实。开平方法除之,得一尺一寸八分九厘二毫零七忽一微一纤五〇〇二七二一〇六六七一七五,即南吕倍律之率[16]。
>
> 【释文:[把蕤宾律的长度]乘以10寸的勾,得到:
> 1.41421356237309504880l689 平方尺
> 这个乘积的平方根为:
> 1.18920711500272106671750 0 尺
> 其数据即南吕律低八度的率。】

这就是说,朱载堉在推算南吕倍律率时,要求新律的南吕律满足等比关系[17]:

$$\frac{\text{蕤宾}}{\text{南吕}}=\frac{\text{南吕}}{\text{黄钟}}$$

导出南吕律的推算公式:

$$\text{南吕}\ =\ \sqrt{(\text{蕤宾})(\text{黄钟})}$$

从而利用蕤宾律$\sqrt{2}$和黄钟律1,算出南吕律$\sqrt{\sqrt{2}}$(或$\sqrt[4]{2}$)。朱载堉计算南吕律$\sqrt{\sqrt{2}}$的数据是1.189207115002721066717500,精确到25位。由此,朱载堉成功地把半八度音程分为两个等比四分八度。

接着,将从南吕律到黄钟律的四分八度音程加以细分,使之成为三个等比半音音程。就是说,要求新律的无射律和应

钟律，分别与黄钟律和南吕律构成下列等比关系：

$$\frac{南吕}{无射}=\frac{无射}{应钟},$$

$$\frac{无射}{应钟}=\frac{应钟}{黄钟}。$$

达到把四分八度分为三个等比半音。因为，消去式中的无射律，就导出应钟律的推算公式：

$$应钟 = \sqrt[3]{(南吕)(黄钟)^2}$$

于是从南吕律 $\sqrt{\sqrt{2}}$ 和黄钟律 1 可算出新律的应钟律 $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$（或 $\sqrt[12]{2}$）。

朱载堉使用应钟律推算公式的过程叙述如下：

> 仍以勾十寸乘之，又以股十寸乘之，得立方积一千一百八十九寸二百〇七分一百一十五厘〇〇二毫七百二十一丝〇六十六忽七一七五为实。开立方法除之，得一尺〇五分九厘四毫六丝三忽〇九纤四三五九二九五二六四五六一八二五，即应钟倍律之率[18]。
>
> 【释文：以勾的 10 寸（即 1 尺）和股的 10 寸（即 1 尺）乘［南吕律弦长］得到立方积：
>
> 1.189207115002721066717500 立方尺
>
> 开立方根得：
>
> 1.059463094359295264561825 尺
>
> 其数据即应钟律低八度的率。】

朱载堉计算出应钟律 $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$（或 $\sqrt[12]{2}$）的数据 1.059463094359295264561825，也精确到 25 位。

一旦求得应钟律，就意味着成功地获得了等比半音音程 S。因为半音率正等于黄钟律与应钟律的比率：

$$S=\frac{黄钟}{应钟}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}=2^{-\frac{1}{12}} \tag{5.1}$$

此处的$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$(或$2^{-\frac{1}{12}}$) 是等比律半音的率。朱载堉称：

是故各律皆以黄钟正数十寸乘之为实，皆以应钟倍数十寸〇五分九厘四毫六丝三忽〇九纤四三五九二九五二六四五六一八二五为法除之，即得其次律也[19]。

【释文：因而，序列中的每一律［S_{i+1}］都能［据前一律S_i］仿此法推求：［把前一律］乘以黄钟律 10 寸（即 1 尺），再除以应钟律 1.059463094359295264561825 尺，即得其次一律也。】

上一段介绍过，数据 1.059463094359295264561825 就是 $\sqrt[12]{2}$，朱载堉这一段文字就讲由前一律 S_i 推算次一律 S_{i+1}的方法，可用现代符号表示成[20]：

$$S_{i+1}=\frac{S_i}{\sqrt[12]{2}}=2^{-\frac{1}{12}}S_i \tag{5.2}$$

式中 S_i 表示第 i 个律。公式(5.2) 是十二等比律的生成公式。至此，朱载堉成功地创制出等比律，解开了音律史上千余年的难题。

生成公式(5.2)可改写如下：

$$S_i=(2^{-\frac{1}{12}})^{i-1}S_1=\gamma_i S_1 \tag{5.3}$$

$$\gamma_i=(2^{-\frac{1}{12}})^{i-1},\quad i=1,2,3,\cdots \tag{5.4}$$

公式(5.4)明确指出律 S_i 与律 S_1 的比率 γ_i。这里的下标 i 以升序标记音律，每 12 个下标跨一个八度。由公式(5.3)可见，如果设 $S_1=2$，则 S_i 给出与浊黄钟律的比率。如

果设 $S_1 = 1$,则 S_i给出与黄钟律的比率。如果设 $S_1 = \frac{1}{2}$,则 S_i 给出与清黄钟律的比率。

5.2.2 等比音阶的分析

朱载堉的等比律,突破了纯律对作乐转调的约束性,超越三分损益二比律旋宫转调的功能。图 5.2.3 列出等比律、三分损益二比律和纯律四比律[21]三种律制的八度圆半音结构,以供比较。

图 5.2.3 等比律的八度圆(上图)由十二个相同的半音 $2^{-\frac{1}{12}}$构成,满足半音八度关系:

$$(2^{-\frac{1}{12}})^{12} = \frac{1}{2} \tag{5.5}$$

这说明等比律具有循环的等势对称性。三分损益二比律的八度圆(左图)由七个小半音$\left(\frac{243}{256}\right)$和五个大半音$\left(\frac{2048}{2187}\right)$两类半音构成,满足半音八度关系:

$$\left(\frac{243}{256}\right)^7\left(\frac{2048}{2187}\right)^5 = \left(\frac{3^5}{2^8}\right)^7\left(\frac{2^{11}}{3^7}\right)^5 = \frac{1}{2} \tag{5.6}$$

因此二比律八度圆的循环,仅呈现局部的等势对称性。纯律四比律的八度圆有四类半音:半音$\left(\frac{15}{16}\right)$六个,半音$\left(\frac{24}{25}\right)$三个,半音$\left(\frac{128}{135}\right)$二个和半音$\left(\frac{25}{27}\right)$一个,从而有下列半音的八度关系:

$$\left(\frac{15}{16}\right)^6\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{128}{135}\right)^2\left(\frac{25}{27}\right) = \frac{1}{2} \tag{5.7}$$

可见纯律八度圆的循环没有什么等势对称性可言。在等

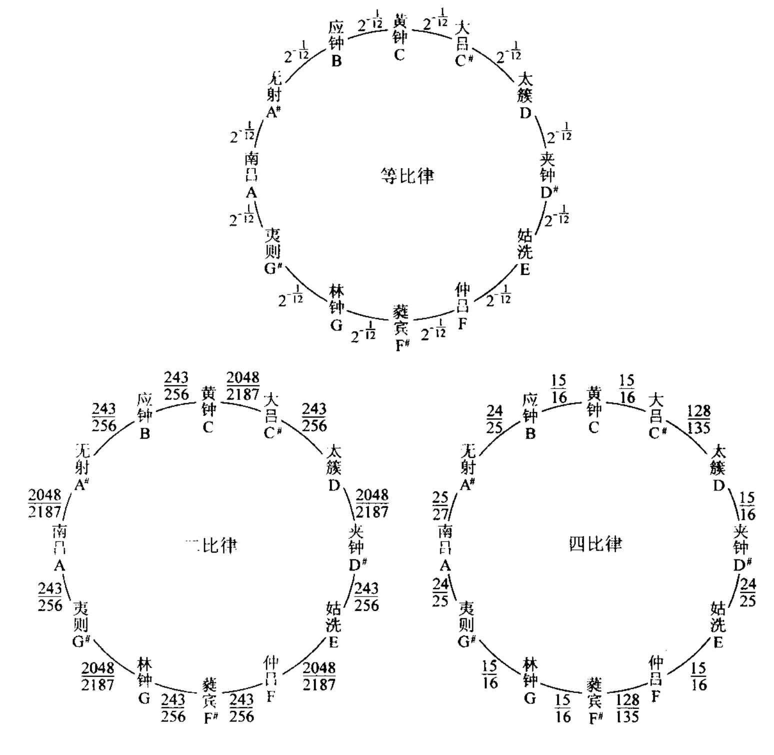


图5.2.3 上图,朱载堉等比律八度圆的半音结构;下左图,三分损益二比律八度圆的半音结构;下右图,纯律四比律八度圆的半音结构。

比律出现之前,三分损益二比律为各律制体系转调功能最高的律制,但与等比律体系相比,就不能同日而语了。

朱载堉认为,三分损益二比律之所以不能"循环无端",是"三分损益算术不精所致也"。他说:

> 盖十二律黄钟为始,应钟为终,终而复始,循环无端,此自然真理……。安有往而不返之理哉?旧法往而不返

者，盖由三分损益算术不精所致也[22]。

【释文：十二律八度系统始于黄钟，终于应钟。一旦结束，重又更新，循环无端。这是自然的真理……。导生这循环系统，怎能依靠一个往而不返的方法？旧法之所以往而不返，源自于三分损益相生法的不精确。】

朱载堉从律制转调功能的角度评论“旧法”。可见，他分析的对象是律制的循环性质。更值得注意的是朱载堉的结论：“三分损益算术不精所致也”。所谓“不精所致”，指旧法三分损益所用数字，会导致二比律在循环性上呈现局限，并不指旧法相生步骤，因为旧法步骤正是朱载堉“相生有四法”中的“其一相生法”（见本节下）。旧法所用数据[23] $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，与朱载堉的新法相对应的数据 $2^{-\frac{7}{12}}$ 和 $\frac{1}{2}$ 从听觉美学角度来相比，可以有不同的结论。这是因为新法数据仅仅是五度率，而旧法所用数据，不仅有纯五度率，而且在所推导出的二比律体系中，还保留了一些纯律的谐和音程[24]。

等比律推导过程表明，把律制中的半音由“二比”降低为“一比”，可以成功地获得全面转调功能。这就是分析等比律八度圆（图 5.2.3 上图）半音结构所得的结论。由于等比律的半音都相等，等比律八度圆就可看成一个十二半音（元素）的旋转群，即群论上所谓的 C_{12} 旋转群，具有全面等势对称旋转性。虽然在朱载堉时代，群论尚未出现，但是朱载堉已意识到他的新律“相生有四法”，他说：

新法不拘隔八相生，而相生有四法，或左旋或右旋，皆循环无端也，以证三分损益往而不返之误[25]。

【释文：新法不拘束于仅仅隔八相生（相当于生成

数7)一个方法,而具有四个不同相生法。[生出之十二律系统]不论是向左转还是向右转,都循环无端。这证明了旧法三分损益十二律系统的"非循环"是错误的。】

朱载堉所说的四种相生法,对应十二元素旋转群的四个生成数:1、5、7和11,涉及四个不同的相生途径。只有当十二元素具有全面等势对称旋转性时,这四种生律途径才是等价的。朱载堉发现了这个原理,并利用这个原理来分析他的新律、证实新法"循环无端"而旧法"往而不返"[26]。

四个生成数1、5、7和11分别有下列四种相生途径。应用生成数1能以升序逐步导生十二律:依次形成基音、小二度、大二度等等音程。应用生成数11能以降序逐步导生十二律:依次形成基音、大七度、小七度等等音程。生成数5和7相当于以五步和七步作相生十二律的音程,其相生途径可用八度圆如图5.2.4示出。图5.2.4右图显示五步相生途径,相应生成数5,然而左图显示的是七步相生途径,相应生成数

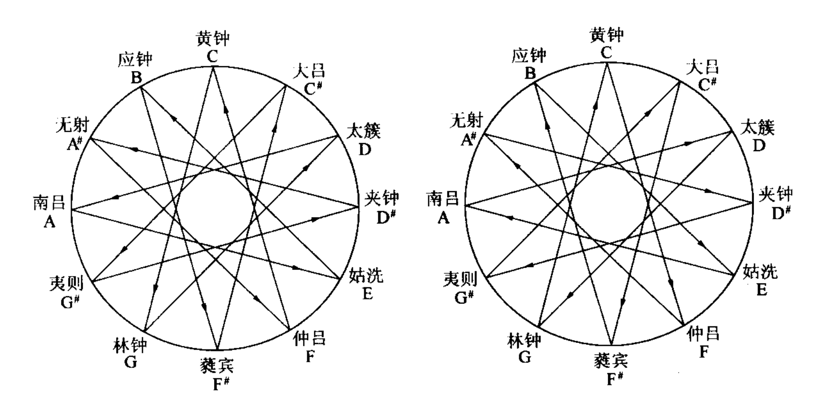


图5.2.4 导生十二律两个途径的顺序比较,左图采用生成数7,右图采用生成数5。

7。很明显,这两个途径是互逆的。

把图5.2.4与图4.5.1相比,清楚地显示出生成数5和生成数7,相当于上下四度相生和上下五度相生。由此可见,七步相生与三分损益相生法的途径完全一样,都是上下五度相生[27]。

朱载堉描述"相生有四法"的"其一"和"其二"生律过程和推算,原文如下:

> 其一,黄钟生林钟,林钟生太簇,太簇生南吕,南吕生姑洗,姑洗生应钟,应钟生蕤宾,蕤宾生大吕,大吕生夷则,夷则生夹钟,夹钟生无射,无射生仲吕,仲吕生黄钟。长生短,五亿乘之;短生长,十亿乘之;皆以七亿四千九百一十五万三千五百三十八除之。
>
> 其二,黄钟生仲吕,仲吕生无射,无射生夹钟,夹钟生夷则,夷则生大吕,大吕生蕤宾,蕤宾生应钟,应钟生姑洗,姑洗生南吕,南吕生太簇,太簇生林钟,林钟生黄钟。长生短,五亿乘之;短生长,十亿乘之;皆以六亿六千七百四十一万九千九百二十七除之[28]。

文中的十二律律名参考图5.2.4,"其一相生法"相当于生成数7途径,即左图,本是旧法三分损益相生(上下五度相生)的途径。"其二相生法"相当于生成数5途径,即右图,是上下四度相生的途径。

"其一相生法"推导十二律的推算和数据如下:

> 长生短,五亿乘之;短生长,十亿乘之;皆以七亿四千九百一十五万三千五百三十八除之。
>
> 【释文:从长(低)律[S_i $(i \leqslant 5)$]生短(高)律[S_{i+7} $(i+7 \leqslant 12)$],每次以 5×10^8 乘低律[S_i $(i \leqslant$

5)]，再除以 749153538。从短(高)律[S_i ($i>5$)]生长(低)律[$S_{(i+7)-12}$ ($i+7>12$)]，每次以 10×10^8 乘高律[S_i ($i>5$)]，再除以 749153538。】

文中长与短(即律的低与高[29])是相对于十二律第八律(即林钟律)而言的，相当于七个半音音程(生成数 7，见图 5.2.4左图)，因此释文中分别用下标号 $i+7$ ($i=1,2,3,4,5$)，表示所生律等于或高于林钟律；用下标号 $(i+7)-12$ ($i=6,7,8,9,10,11,12$)表示所生律低于林钟律。

虽然"其一相生法"涉及的是七个半音音程(生成数 7)，但是在导生律推算过程中所需要的数据，因上生和下生而有所不同。下生(由长生短，即由低生高)所需音程，是 7 个半音音程，相当于林钟律。朱载堉下生所得的数据是$\frac{5\times10^8}{749153538}=\frac{2^{-1}}{0.749153538}$，即 $2^{-\frac{7}{12}}$。可是当上生(由短生长)时，就是用七个半音音程由高律生低律时，所生得的律必定超越八度，需要用音程$\frac{1}{2}$降低八度。因此，上生所需音程是 $\frac{2^{-\frac{7}{12}}}{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{12}}$，这也正是朱载堉为上生所得的数据 $\frac{1}{0.749153538}$。

一旦得到从低律S_i ($i\leqslant5$)生高律 S_{i+7} ($i+7\leqslant12$)的音程 $2^{-\frac{7}{12}}$，以及从高律 S_i ($i>5$)生低律 $S_{(i+7)-12}$ ($i+7>12$) 的音程 $2^{\frac{5}{12}}$，朱载堉就导出了等比律，相当于生成数 7 的"其一相生法"。采用现代符号，"其一相生法"可表示为：

$$S_{i+7}=2^{-\frac{7}{12}}S_i,\quad i+7\leqslant12 \tag{5.8a}$$

$$S_{(i+7)-12}=2^{\frac{5}{12}}S_i,\quad i+7>12 \tag{5.8b}$$

这里，$S_1 = 1$, $i = 1,2,\cdots,12$，记八度中十二律的升序排列。

“其一相生法”与三分损益相生法，在步骤上完全一样，只是所用的数据不同。上文说过，旧法用纯五度$\frac{2}{3}$和八度$\frac{1}{2}$，而新法用五度$2^{-\frac{7}{12}}$和八度$\frac{1}{2}$，两者实质相同。数据$2^{\frac{5}{12}}$是由升五度降八度而来，即$\frac{2^{-\frac{7}{12}}}{\frac{1}{2}}$。这说明旧法相当于使用了生成数7。

“其二相生法”推导十二律的推算和数据如下：

> 长生短，五亿乘之；短生长，十亿乘之；皆以六亿六千七百四十一万九千九百二十七除之。
>
> 【释文：从长（低）律[S_i $(i \leqslant 7)$]生短（高）律[S_{i+5} $(i+5 \leqslant 12)$]，每次以5×10^8乘低律[S_i $(i \leqslant 7)$]，再除以667419927。从短（高）律[S_i $(i>7)$]生长（低）律[$S_{(i+5)-12}$ $(i+5>12)$]，每次以10×10^8乘高律[S_i $(i>7)$]，再除以667419927。】

这里所说的高低是与十二律第六律（即仲吕律）相比而言，相当于五个半音音程（生成数5，见图5.2.4右图），因此释文中分别用下标号$i+5$ $(i = 1,2,3,4,5,6,7)$，表示所生律等于或高于仲吕律；用下标号$(i+5)-12$ $(i = 8,9,10,11,12)$，表示所生律低于仲吕律。

“其二相生法”涉及五个半音音程（生成数5），与“其一相生法”一样，在上生和下生推算中所需数据有所不同。从低律S_i $(i \leqslant 7)$生高律S_{i+5} $(i+5 \leqslant 12)$所得的数据是

$\frac{0.5}{0.667419927}$，即 $2^{-\frac{5}{12}}$，从高律 S_i （i＞7）生低律 $S_{(i+5)-12}$ （$i+5>12$）所得的数据是$\frac{1}{0.667419927}$，即 $2^{\frac{7}{12}}$。采用现代符号，“其二相生法”可表示为：

$$S_{i+5} = 2^{-\frac{5}{12}}S_i, \quad i+5 \leqslant 12 \tag{5.9a}$$

$$S_{(i+5)-12} = 2^{\frac{7}{12}}S_i, \quad i+5 > 12 \tag{5.9b}$$

这里，$S_1 = 1$，$i = 1,2,\cdots,12$，记八度中十二律的升序排列。

由此可见，朱载堉“其二相生法”的确是上下四度相生法，仅仅是所用四度数据不同。前法数据用四度 $2^{-\frac{5}{12}}$和八度$\frac{1}{2}$，而后法数据用纯四度$\frac{3}{4}$和八度$\frac{1}{2}$。“其二相生法”从高律生低律的数据 $2^{\frac{7}{12}}$，是由升四度降八度而来，即$\frac{2^{-\frac{5}{12}}}{\frac{1}{2}}$。同理，上下四度相生法所用从高律生低律的数据$\frac{3}{2}$，是由升四度降八度而来[30]，即$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$。

朱载堉“相生有四法”中“其三”和“其四”生律过程和推算如下：

> 其三，黄钟生大吕，大吕生太簇，太簇生夹钟，夹钟生姑洗，姑洗生仲吕，仲吕生蕤宾，蕤宾生林钟，林钟生夷则，夷则生南吕，南吕生无射，无射生应钟，应钟生黄钟半律。此系长生短，皆以五亿乘之，皆以五亿二千九百七十

三万一千五百四十七除之。

其四，黄钟半律生应钟，应钟生无射，无射生南吕，南吕生夷则，夷则生林钟，林钟生蕤宾，蕤宾生仲吕，仲吕生姑洗，姑洗生夹钟，夹钟生太簇，太簇生大吕，大吕生黄钟。此系短生长，皆以十亿乘之，皆以九亿四千三百八十七万四千三百一十二除之[31]。

由律名顺序可知，"其三相生法"途径相应于用生成数 1，以升序逐步导生十二律。同样可见，"其四相生法"途径相应于用生成数 11，以降序逐步导生十二律。很明显，这两条途径也是互逆的。

"其三相生法"所载推导十二律的推算和数据的叙述如下：

此系长生短，皆以五亿乘之，皆以五亿二千九百七十三万一千五百四十七除之。

【释文：这个序列只从长（低）律[S_i]生短（高）律[S_{i+1}]，每次以 5×10^8 乘低律[S_i]，再除以 529731547。】

"其三相生法"涉及半音音程（生成数 1），从低律 S_i 生高律 S_{i+1} 所得数据是 $\frac{0.5}{0.529731547}$，即 $\frac{2^{-1}}{2^{-\frac{11}{12}}} = 2^{-\frac{1}{12}}$。因此，"其三相生法"可用现代符号写成下列公式：

$$S_{i+1} = 2^{-\frac{1}{12}}S_i, \quad i = 1,2,\cdots,12 \tag{5.10}$$

这就是初见于第 5.2.1 节的等比律公式(5.2)。

最后我们分析，"其四相生法" 所载推导十二律的推算和数据的叙述：

此系短生长，皆以十亿乘之，皆以九亿四千三百八十七万四千三百一十二除之。

【释文：这个序列只从短（高）律[$S_{(12-i)+1}$]生长（低）律[$S_{(12-i)}$]，每次以 10×10^8 乘高律[$S_{(12-i)+1}$]，再除以 943874312。】

"其四相生法"从高律 $S_{(13-i)+1}$ 生低律 $S_{(13-i)}$，从黄钟半律 $S_{13}=\frac{1}{2}$开始，以降序生出应钟律，逐步导生出十二律。这个导生途径也正是生成数 11 的途径，因为应钟律导生于黄钟半律，也可看成为以十一个半音音程（生成数 11）导生于黄钟律 $S_1=1$。从而可得推算数据$\frac{2^{-\frac{11}{12}}}{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{12}}$。朱载堉所得数据是$\frac{10\times10^8}{943874312}=\frac{1}{0.943874312}$，即 $2^{\frac{1}{12}}$。因此，"其四相生法"可用现代符号表示为：

$$S_{13-i}=2^{\frac{1}{12}}S_{(13-i)+1},\quad i=1,2,\cdots,12 \tag{5.11}$$

如果把降序用 $13-i$ 改变成升序 i 公式(5.11)可改写如下：

$$S_i=2^{\frac{1}{12}}S_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,12 \tag{5.12}$$

这正是公式(5.10)的反推公式，可以用来反向逐步推导出十二律。

以上介绍和分析明确地证实，朱载堉的四法就是一个十二元素旋转群的四个相生法，分别应用生成数 1、5、7 和 11。他明确表示，这四个相生法在他的新律体系中是等价的，可以推导出同一套十二律，从而证实了他的新律有"或左旋或右旋，皆循环无端"的特性。也就是说，等比律具有全面等势的

C_{12}对称性。

值得注意的是，在朱载堉时代，群论尚未出现，新律“相生有四法”的推导，建立在他个人对新律的独立分析上。这也是朱载堉一个开创性的数学成就。

5.3 等比律律管

完成推导等比律新律制之后，朱载堉着手用律管保存十二等比律的结构，作为标准律。本节考察朱载堉十二等比律律管的构作法。为此，先回顾朱载堉的前辈们有关标准律律管的工作，作为背景，然后根据原文，分析朱载堉的律管工作。

5.3.1 律管和律的标准化

在第1.1节中讨论音律时，我们就提到过，中国古代很早就有标准化律的实施。《尚书》有“同律度量衡”的记载[32]。通过测量多种尚保存发音功能的商代出土乐器，我们得悉，商代所用的律在可容许误差之内几乎相同，这说明商代就有标准化律的倾向[33]。在第3.2节中也曾提到，根据曾侯乙编钟上层2排6号钟铭文和频率的测量，可知公元前5世纪黄钟律的相当频率，大约是410.1赫兹[34]。

中国古代确定标准律的器具是律管。这种选择在实践上可行，在科学上也具有优点。在古代，发音器具和方法可供选择的余地并不多。相对来说，律管不但构作比较容易，发音也比较稳定。张紧的弦，固然能方便地确定音律的比率，但是古人无法固定和测量弦的张力。不能长期保持弦的张力，就无法长期维持弦律不变，也就是说，弦不适合于作为标准律器具。律管虽然在确定音律比率上不如弦精确，但是一旦制定，

律管的律一般情况下不会产生误差。古代的律管是用竹管制成的,缺点是容易腐烂。尽管如此,近来在战国墓中出土的前秦时期的律管,虽已破碎,但有四支律管还能读出残缺的铭文。铭文用律名和术语"定"一词,表达定律的过程,这在第3.2节中已详细介绍过。这些出土律管证实,在战国时代所用的律管,孔径不等,两端开口,无节。

律管构制的关键,在于如何为某一律确定相应的律管长度和孔径。在古代,振动频率概念尚未出现,不知道振动频率与律之间的定量关系。古人把律的定量概念建立在发音振体长度的基础上。现代声学揭示,管内空气振动柱实际长度,要比管长略长些。如用相应弦长作管长,即使各律管孔径都一样,管律仍然会出现误差。就是说,具备了律的比率知识,还不足以制出精确的标准律律管。先秦时代律管是如何制作的,至今尚未发现明确的记载。现存最早的十二律管长度记录,出现在公元前90年的《史记》中。在第4.3节已作过介绍和分析,并把所载律管长度与计算有关数据列入表4.3.1中作过比较。利用近代律管声响知识,可以证实《史记》所载十二支律管,孔径并不相同。可是《史记》没有记载律管孔径,所记载律管长度,也不能简单地对应于弦律长度。这表明《史记》所载的律管,是凭经验用听觉校正的。

制作律管时,如果要凭听觉进行校正,那么律管的管长和管孔的径宽都可作为调节参数。《史记》中律管的制造就是如此,管长与孔径大小两者都凭经验和实际情况而定。这一点与前述出土战国律管孔径各不相等的事实相符。有些古代学者建议,十二律律管的管径应该保持相同[35]。例如,东汉蔡邕说:

律虽有大小,圆径无增减[36]。

【释文：尽管律不相同，[相应律管]孔径应该不增不减，保持不变。】

《月令》有下列记载：

凡律空围九分[37]。

【释文：所有的律，[相应律管]管空的圆周应该设定为9分。】

这些建议确有其优点，因为采用相同管径制作律管，不再把孔径大小作为未知量，就把可调节参数从两个减为一个。然而在古代，寻找十二根管径相等的竹管，也不一定最方便，古代律管不是机械制品，只能利用天然竹子制作。何况在古代，只能依靠经验进行管口校正，即使真的用了相等管径的竹管，也还需要对每一支竹管的管长作个别调节。

校正管口所需要的物理原理比较复杂，直到公元3世纪，人们才获得一些初步认识。荀勖（卒于公元289年）为十二律作过（直吹）笛十二支，每支相应一律。为了调整笛的律和各个按孔之间的距离，荀勖在计算吹口之下所设笛律的宫孔位置时，考虑到管口校正所产生的管长差，作过一些数据调整[38]。到16世纪，朱载堉凭实验和推理，初步掌握了律管音响物理的一些要点，系统地作出管口校正，创制了等比律管。下面考察朱载堉为等比律制而制作标准律管的工作。

5.3.2 等比律管制作法

朱载堉认为不同律的律管，不仅管长不同，管径也应不同。如果保持管径不变，仅仅调节管长来制作律管，是“未达

之论也”。他说：

譬诸律管，虽有修短之不齐，也有广狭之不等。先儒以为长短虽异，围径皆同，此未达之论也[39]。

【释文：各律律管虽然长度不同，但管径宽度也不同。前人以为，虽律管长度各异，律管管径则可皆同。这看法至今尚未能得到证实。】

由此可见，朱载堉并不认为，保持管径宽度不变，仅以校正律管长度，就可以成功地制作所要律管[40]。他提出一个同径律管的实验，来支持他的见解：

大抵正半相较，半律虽清而反下，正律虽浊而反高，岂不以其管短气宽也哉！盖由围径不得自然真理故耳。夫律管修短既各不同，则其空围亦当有异[41]。

【释文：正半［同径律管］相比，大致上，［半长律管的］半律虽为高，［与相应清律相比］却音略低，而［全长律管的］正律虽为低，［与相应正律相比］却音略高。这不正是因为管短不能容纳较宽气柱！原因在管孔的圆周未能按照自然原理设置。律管长短既然不同，管孔的圆周（因此孔径）也应当相应地有所不同。】

这种观察在16世纪是十分先进的。朱载堉已正确地认识到，律管的律由律管中气柱决定。他用“管短气宽”来解释为什么正确的弦长比率应用在律管上，所得律管的律却并不符合原律。

由此可见，朱载堉已经正确地掌握了律管音响的一些要点。在这个实验观察的基础上，朱载堉推论，利用已求得律弦长比率来制作律管，必须相应地校正律管孔径，以容纳适当气

柱，从而开拓了一个新的律管制作法。

在制作律管之前，首先必须依标准律确定（至少一支）律管的孔径。朱载堉首先确定的是黄钟倍律的律管孔径。在借助于方圆相容几何关系推导等比律时，朱载堉曾经设黄钟倍律的相应直径为2尺（见表5.2.1）。朱载堉设黄钟倍律孔径的叙述如下：

> 先置黄钟倍律通长二尺为实，四十除之，得五分，是为内径[42]。
>
> 【释文：置倍律浊黄钟的长度2尺为分子，除以40，得5分，作为内径。】

由此可知，朱载堉把倍律浊黄钟2尺长的律管管径设为5分，从而确定了浊黄钟的绝对频率[43]。

依照“律管修短既各不同，则其空围亦当有异”的看法，朱载堉认为，应用等比律比率 γ_i［见公式(5.4)］确定相对管长制作的律管，其孔径也应有相应的等比关系。分析律管截面孔径，朱载堉对律管截面提出如下要求：

> 盖律管两端形如环田，有内外周径也。外周内之方即内径也，内周外射之斜即外径也[44]。
>
> 【释文：律管两端截面都是圆环形，具有内周（即孔）直径和外周直径。外周的内接正方的边长给出内周直径，穿越内周的正方对角线给出外周直径。】

值得注意的是，朱载堉对律管两端截面的要求。他要求不影响律管的基音，只影响与律管管壁厚度有关的音色。这样的要求，并不是一般天然竹管所能满足的，因为竹管截面外周的内接方，并不一定是内周的外切方。朱载堉主张用铜管

制造等比律管,保持律管截面的相切圆方和内外周等比关系:外直径 $=\sqrt{2}$内直径。既然律管长度之比是等比律比率 γ_i,朱载堉认为相应律管孔径之比率[45]应该是$\sqrt{\gamma_i}$。就是说,律管孔径的等比常数是 $2^{-\frac{1}{24}}$。

朱载堉用此等比常数从浊黄钟管径推算浊大吕的管径的原文如下:

> 置黄钟倍律内径五分为实,以十亿乘之,以十亿〇二千九百三十万〇二千二百三十六除之,得四分八厘五毫七丝六忽五微九纤为大吕[46]。
>
> 【释文:置黄钟倍律律管孔径[D_1] 5 分为分子,乘以 10×10^8,再除以 1029302236,得到 4.857659 分,即浊大吕律管孔径[D_2]。】

这里,朱载堉算出浊大吕律管孔径的数据是$\frac{10\times10^8}{1029302236}=\frac{1}{1.029302236}$,即常数 $2^{-\frac{1}{24}}$。采用现代符号,从浊黄钟管径 D_1 推算浊大吕管径 D_2,可表示成:

$$D_2=\frac{D_1}{\sqrt[24]{2}}=2^{-\frac{1}{24}}D_1 \qquad (5.13)$$

在此 $D_1=5$ 分。

现在再分析,朱载堉关于从浊大吕管径推算浊太簇管径的叙述:

> 置大吕倍律内径四分八百五毫七丝六忽五微九纤为实,以十亿乘之,以十亿〇二千九百三十万〇二千二百三十六除之,得四分七厘一毫九丝三忽七微一纤为太簇[47]。

【释文:置大吕倍律律管孔径[D_2]4.857659 分为分子,乘以 10×10^8,再除以 1029302236,得到4.719371 分,即浊太簇律管的孔径[D_3]。】

显然,朱载堉所用的数据,仍然是常数 $2^{-\frac{1}{24}}$。这个推算步骤同样地可表达如下:

$$D_3 = \frac{D_2}{\sqrt[24]{2}} = 2^{-\frac{1}{24}}D_2 = 2^{-\frac{1}{12}}D_1 \qquad (5.14)$$

这里,D_1 =5 分,D_2 =0.4719371 寸。

依次类推,朱载堉采用常数 $2^{-\frac{1}{24}}$,以升序逐步由前一律管管径导算出后一律管管径。表 5.3.1 中列出朱载堉等比律管

表 5.3.1 朱载堉计算的等比律管的长度及孔直径

律名	倍律		正律		半律	
	长度(尺)	直径(寸)	长度(尺)	直径(寸)	长度(尺)	直径(寸)
黄钟	2	0.500000	1	0.353553	0.5	0.250000
大吕	1.887749	0.485766	0.943874	0.343488	0.471937	0.242883
太簇	1.781797	0.471937	0.890899	0.333710	0.445449	0.235969
夹钟	1.681793	0.458502	0.840896	0.324210	0.420448	0.229251
姑洗	1.587401	0.445449	0.793701	0.314980	0.396850	0.222725
仲吕	1.498307	0.432768	0.749154	0.306013	0.374577	0.216384
蕤宾	1.414214	0.420448	0.707107	0.297302	0.353553	0.210224
林钟	1.334840	0.408479	0.667420	0.288838	0.333710	0.204239
夷则	1.259921	0.396850	0.629961	0.280616	0.314980	0.198425
南吕	1.189207	0.385553	0.594604	0.272627	0.297302	0.192776
无射	1.122462	0.374577	0.561231	0.264866	0.280616	0.187288
应钟	1.059463	0.363913	0.529732	0.257326	0.264866	0.181957

全表计算的基础数据为:设置浊黄钟律(比黄钟律低八度)律管长 2 尺,直径0.5 寸。

的数据，这是他给等比律管长度及孔直径，在三个八度（倍律、正律、半律）之间，所算得的数值。

表5.3.1中三十六等比律管的数据，依据一根两端开口无节的竹管，管长2尺，管径5分，作为所定浊黄钟律的律管。

等比律管的管长 L_i 是依照等比律比率 γ_i［见公式(5.4)］制作的，朱载堉推算管径的步骤，可由公式(5.3)改写成下列公式[48]：

$$L_i = (2^{-\frac{1}{12}})^{i-1}L_1 = \gamma_i L_1 \tag{5.15}$$

这里，$L_1 = 2$ 尺。下标 $i = 1,2,\cdots$，以升序标记律管，每12个下标跨一个八度。根据律管管径等比常数 $2^{-\frac{1}{24}}$，朱载堉推算管径的步骤也可用现代符号写成下列公式：

$$D_{i+1} = 2^{-\frac{1}{24}}D_i \tag{5.16a}$$

$$D_i = (2^{-\frac{1}{24}})^{i-1}D_1 = \sqrt{\gamma_i}D_1 \tag{5.16b}$$

这里，$D_1 = 0.5$ 寸。下标 $i = 1,2,\cdots$，以升序标记律管，每12下标跨一个八度。公式(5.15)和公式(5.16)就是等比律管管长和管径的推算公式。朱载堉用这种制作法创制了等比律管，突破了千余年来只凭经验，以听觉进行管口校正的局限。

5.3.3 等比律管制作的分析

朱载堉制作等比律管的方法，先利用已求得的等比律之弦长比率，制作律管管长，然后利用管径比率常数，推算出等比律管管径。这种方法建立在他对律管音响的实际研究和比例概念的应用中。他对管口校正的律管音响认识可总结如下：凭弦长比率制作律管管长，之所以出现误差，是因为“管短气宽”。“管短”的问题可以靠校正相应律管孔径，从而增强气柱容量而得到解决。

他对管口孔径之比的推论可总结如下:律管孔径之比,与对应律的长度之比应该相适应,形成等比关系。也就是说,律管孔径的比率是一个常数。

由此可见,朱载堉校正律管孔径的这个系统方法,远远超出历代仅凭经验进行管口校正的水平。

现在我们利用现代律管声学知识,进一步分析朱载堉的律管制作法。在第 4.3 节中已提到律管推算公式[见公式(4.1)、(4.5)和(4.6)]。在标准环境下,一支开口律管的基音频率 f_n 由其长度 l_n 和孔径 d_n 确定:

$$f_n = \frac{v}{2(l_n + 0.58d_n)} \tag{5.17}$$

这里,$v = 343$ 米/秒,是声音在 20℃ 空气中的传播速度。由此可见,律管管长 l_n 和管孔径宽 d_n 是制作律管的两个可变参数。古代凭经验以听觉调节管长或径宽,制作律管,确实是可行之法。先儒"围径皆同"仅以调节管长制作律管,也是可行之法[49]。现在利用律管推算公式(5.17),分析朱载堉的律管制作法。

已知第 n 律和第一律的比率 γ_n,就可以从第一律原基音频率 f_1,求得第 n 律的原基音频率 f_n:

$$f_n = \frac{f_1}{\gamma_n} \tag{5.18}$$

假设律管的律与此原律相等,就得到下列公式[即公式(4.5)]:

$$l_n = \gamma_n l_1 + 0.58(\gamma_n d_1 - d_n), \quad n = 1,2,\cdots, \tag{5.19}$$

这公式说明,要求管律与原律相同,原律长 $\gamma_n l_1$ 必须经过孔径调节,才能得到正确的律管管长 l_n。也就是说管口校正公式 $\Delta l_n = l_n - \gamma_n l_1$,正如朱载堉所说,可以校正相应律管

孔径 d_n 而得到。

以等比律而言，γ_n 就是公式(5.4)所示律 S_i 与律 S_1 的比率 γ_i。应用到等比律管上，公式(5.19)可改写如下：

$$\Delta L_n = L_n - \gamma_n L_1 = 0.58\ (\gamma_n D_1 - D_n) \qquad (5.20)$$

为了利用已求得等比律的比率，构制律管管长，朱载堉设 $L_n = \gamma_n L_1$。公式(5.20)对孔径 D_n 的要求，见下列关系：

$$D_n = \gamma_n D_1 = (2^{-\frac{1}{12}})^{n-1} D_1, \quad n = 1,2,3,\cdots \quad (5.21)$$

这正是朱载堉所推得孔径应有的等比关系，只是等比常数不同。与公式(5.16)相比，可知朱载堉所用孔径等比常数是 $2^{-\frac{1}{24}}$，而公式(5.21)的等比常数是 $2^{-\frac{1}{12}}$。表 5.3.2 把用公式(5.21)所算得的孔径，与表 5.3.1 朱载堉等比律管的数据加以比较。

据报道，1890 年比利时马容(Mahillon)根据朱载堉的法则，制作出三个八度中的三支黄钟律管[50]，发出律管音 $^bE_3$、$^bE_4$ 和 $^bE_5$。这似乎证实了朱载堉确定律管孔径的公式(5.15)。1932 年，杨荫浏按照朱载堉的法则，又一次进行等比律管结构实验，既不能证实公式(5.15)，也不能证实马容的实验结果[51]。杨荫浏注意到，如把公式(5.15)中的等比常数 $2^{-\frac{1}{24}}$ 换成 $2^{-\frac{1}{12}}$，就能制作出一组能给出等比律的律管。有些近代学者仍然为常数 $2^{-\frac{1}{24}}$ 辩护，并就杨荫浏为什么不能重复马容的实验，提出种种猜测[52]。然而，公式(5.21)证明孔径等比常数就是 $2^{-\frac{1}{12}}$。

朱载堉虽然把孔径的等比常数估计得较大，可是他正确地推导出：等比律管孔径之比也构成等比。更重要的是，他正确地掌握律管管口校正的物理知识，并提出一个正确而系统的方法来处理律管管口校正。16 世纪朱载堉的这些律管音

表 5.3.2　比较朱载堉等比律管数据与公式(5.21)的直径数据

律名	倍律			正律			半律		
	长度(尺) 公式(5.15)	直径(寸) 公式(5.16)	直径(寸) 公式(5.21)	长度(尺) 公式(5.15)	直径(寸) 公式(5.16)	直径(寸) 公式(5.21)	长度(尺) 公式(5.15)	直径(寸) 公式(5.16)	直径(寸) 公式(5.21)
黄钟	2	0.500000	0.500000	1	0.353553	0.250000	0.5	0.250000	0.125000
大吕	1.887749	0.485766	0.471937	0.943874	0.343488	0.235969	0.471937	0.242883	0.117984
太簇	1.781797	0.471937	0.445449	0.890899	0.333710	0.222725	0.445449	0.235969	0.111362
夹钟	1.681793	0.458502	0.420448	0.840896	0.324210	0.210224	0.420448	0.229251	0.105112
姑洗	1.587401	0.445449	0.396850	0.793701	0.314980	0.198425	0.396850	0.222725	0.099213
仲吕	1.498307	0.432768	0.374577	0.749154	0.306013	0.187288	0.374577	0.216384	0.093644
蕤宾	1.414214	0.420448	0.353553	0.707107	0.297302	0.176776	0.353553	0.210224	0.088388
林钟	1.334840	0.408479	0.333710	0.667420	0.288838	0.166855	0.333710	0.204239	0.083427
夷则	1.259921	0.396850	0.314980	0.629961	0.280616	0.157490	0.314980	0.198425	0.078745
南吕	1.189207	0.385553	0.297302	0.594604	0.272627	0.148651	0.297302	0.192776	0.074325
无射	1.122462	0.374577	0.280616	0.561231	0.264866	0.140308	0.280616	0.187288	0.070154
应钟	1.059463	0.363913	0.264866	0.529732	0.257326	0.132433	0.264866	0.181957	0.066216

注:全表计算的基础数据为:设置浊黄钟律(比黄钟律低八度)律管长 2 尺,直径 0.5 寸。

响成就,如同他的等比律制一样,也是一项先驱性的声学贡献。

5.4 评论和评价

5.4.1 欧洲平均律的发展

随着文艺复兴的发展,欧洲音乐出现了多方面的变化,取得了新的成就。早期记载宗教格列高利圣咏音乐的符号,以标线改进音位表示法,逐渐地演变成现今的五线谱音乐书写系统。在乐器制作上,也出现了多方面的发展。例如,中世纪的六弦提琴(viols)在16到17世纪期间逐渐得到改进,形成现今的小、中、大提琴系列。值得在此提出的另一种乐器的发展,是键盘和击弦古钢琴(clavichord)的改进,在18世纪期间逐渐地演变为现今的钢琴(pianoforte)。在作乐理论和技巧上,在这期间也出现了多方面的变化,例如由单调体逐渐地走上复调体的音乐结构。但是在作乐的调色变动上,欧洲人经过了一段漫长的探索过程,以寻求增强“毕达哥拉斯”音律和纯律的转调功能。当时欧洲人的调色主要来自古希腊,例如多里安(Dorian)和利第亚(Lydian)七声调式,由两个“四音列”和一个整音组合而成[53]。

欧洲人面对的转调问题,与古代中国似乎类似,但在细节上有重要区别。在第5.1节中已指出,欧洲人所谓的“毕达哥拉斯十二音律”,不仅出现最大音差,而且并非出于毕达哥拉斯之手,只是后世以五度旋生法所推导出的十二音律。其转调功能,与古代中国三分损益十二音律相比,差别甚大。约从16世纪到18世纪,欧洲音律学界主要的目的,是要把最大

音差分配到个别调节的音程上,同时尽可能地容纳一些纯律的主要悦耳音程。从事这类的音律研究,在欧洲称之为“temperament”,这个词出自英文“tempering”,即“调节”和“更改”的意思。它研究如何调节纯律音程,平均地容纳最大音差。

出于对均分音差种种不同的看法和处理,这期间出现了好几种平均律。律学家们,如西班牙的萨利纳斯(Francisco de Salinas,1513 ~ 1590),意大利的扎利诺(Gioseffe Zarlino,1517 ~ 1590)和法国的梅森(Marin Mersenne,1588 ~ 1648),各自提出了不同的平均律。但是这些平均律,除了用来更改个别律音来容纳音差之外,还纳入了一些纯律音程,但它并没有成功地获得转调功能的改进。例如,在 1511 年,德国演奏家施利克(Arnold Schlick)利用平均纯律大全音$\left(\frac{8}{9}\right)$和小全音$\left(\frac{9}{10}\right)$所改进的中音调律(mean-tone temperament),虽然在 16 世纪到 17 世纪兴盛一时,但中音调律只可容纳 9 个调式的转变[54]。这些平均律都是“非等比”平均律,其十二律之间多处出现诸如前一律音的降半音与后一律,以及后一律音的升半音与前一律等等的互不兼容现象,从而制约了调式的变动[55]。这个问题的关键在于平均概念上,因为出于客观自然的悦耳纯律,律的半音程本来就是不相等的(见图 5.2.3和第 3.5.2 节)。

应用平均概念的另一思路是等分最大音差,不考虑纯律的自然音程,把等分出的音差分配到八度之间的每一个律音上。这种思路涉及推算最大音差的十二等比分,在 16 世纪的欧洲,仍然是一个复杂得难以解决的数学问题。然而欧洲律学界,最终仍然沿着这条“等分最大音差”的思路,逐渐得出“等比”平均律,从而解决了转调的问题。

欧洲人在转调功能上获得的成功，首先出现在调谐乐器音阶的实践上。为了避免最大音差出现在乐器音阶中，当时欧洲人用五度旋生法调谐乐器，凭经验作出一些调整，把生律用的五度略为提高，同时保持音阶八度的正确音程。这是因为，提高生律音程，具有消除最大音差的作用，可以增强音阶的转调功能。由于缺乏正确数据，欧洲音乐家在调谐乐器的实践上，通常凭着经验提高生律音程，取得适合转调的音阶。约在17世纪到18世纪期间，各种键盘乐器，例如打击弦古钢琴，普遍采取这种方法调谐键盘。现在我们知道，如果生律音程提高得当，不但可以消除全部最大音差，而且可以使得一个黑键的律音，同时成为前一白键律音的降半音，也成为后一个白键律音的升半音。如果键盘乐器每一个黑键都能如此调谐，那么不仅能做到每个八度之间只需要五个黑键，而且出现在键盘上的音阶，应该是"等比"平均律音阶，允许全面的调色变动。

1722年，德国音乐家巴赫(John Sebastian Bach，1685 ~ 1750)作了24首"前奏曲"(preludes)和"赋格曲"(fugues)，他的意图是要表明经过适当调谐的键盘，可以方便地容纳12个大调和12个小调的调式转变。22年后，巴赫又增加了24首，把这48首"前奏曲"和"赋格曲"编成曲集，并题名为"Well-Tempered Clavier"，即"调谐完好的键盘乐器曲"[56]。他要用这48首乐曲来证实，乐器的键盘经过适当的调谐，它的音阶确实可以方便地容纳24个大调、小调的调式变动。可惜巴赫并没有说明，调谐完好的乐器键盘具有什么平均律，也没有给出生律音程的率，或者提高五度的音程。换句话说，巴赫没有给他所谓的"调节完美的"(well-tempered)平均律配备精确数据。因此后人无法估计，当时"调节完美的"平均律，容纳巴赫48首乐曲转调的精确程度。巴赫的集名"Well-Tem-

pered Clavier",通常翻译成《十二平均律钢琴曲》。有些学者认为,巴赫所谓"调节完美的"平均律(well-tempered temperament)就是等比律(equal temperament)[57],也有些西方学者认为,等比律出自巴赫之手[58]。我们认为,尽管在实践上,凭经验调谐乐器键盘,可以精密地得出导生等比律的音程,但是在理论上,等比律的认识仍然必须建立在推算的数据上。

5.4.2 等比律在欧洲的出现

在欧洲,等比律出现于平均律运动中,上节已提到,约在16世纪到18世纪期间,欧洲音律学界主要的研究,是如何把最大音差分配到八度之间的律音上。在这个运动中,极多数分配音差的研究,试图同时容纳纯律的一些主要协和音程。因此,得出的平均律是"非等比"平均律,在转调功能方面,就没能获得所希望的成功。倒是通过等分最大音差的研究,欧洲律学家逐渐发现了等比律。在17世纪,法国乐理音律学家梅森提出以最大音差的等分,均分到八度中律音上的理论。这相当于用等分的音差,来增高五度,作为生律的音程。1636年,梅森发表了如此推算所得的"等比"平均律数据近似值[59]。约半个世纪后,德国音乐家威克梅斯特(Andreas Werckmeister,1645~1706)在1691年也推算出等比律的近似数据[60]。

事实上,由第5.2.2节所述朱载堉等比律推算可知,用较高的五度作为生律音程,的确可以推导出等比律,关键在于如何推算提高五度的音程。把生律音程由纯五度提高的目的,在于对消最大音差。既然在八度之间需要生律十二次,提高五度音程,应该是最大音差十二等比分之一。也就是说,最大音差等分应该是等比分。求等比分,得开最大音差的十二次方根。用现代符号,开最大音差的十二次方根得到:

$$\sqrt[12]{\frac{524288}{531441}} = \sqrt[12]{\frac{2^{19}}{3^{12}}} = \frac{2^{\frac{19}{12}}}{3} \tag{5.22}$$

用最大音差十二等比分的音程提高纯五度$\frac{2}{3}$得：

$$\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt[12]{\frac{524288}{531441}}} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2^{\frac{19}{12}}}\right) = 2^{1-\frac{19}{12}} = 2^{-\frac{7}{12}} \tag{5.23}$$

这就是导生等比律所需要的音程。这个音程正是1584年朱载堉所得等比律的五度(见图5.2.3和表5.4.1)，比纯五度略高[61]。用等比律五度$2^{-\frac{7}{12}}$作导生十二律的音程，正是朱载堉所谓的“相生有四法”中的“其一”[见第5.2.2节和公式(5.8)]。这就可以证实，从等分最大音差的研究中，的确可以推算出等比律[62]。值得注意的是，朱载堉的等比律五度$2^{-\frac{7}{12}}$是从等比律的半音$2^{-\frac{1}{12}}$求得的，而不是从纯五度和最大音差的十二等比分所求得的，见公式(5.23)。

虽然在17世纪的欧洲已经出现了推算等比律的探索，但是，这没有引起音律学界的注意，也没有引起音乐学界的兴趣。直到18世纪，等比律在转调上的优点才得到有系统的研究，上节已叙述了德国音乐家巴赫在1722年和1744年作的《十二平均律钢琴曲》，他要表明“调节完美的”平均律可以容纳24律调的调式变动。巴赫所谓的“调节完美的”平均律，虽然有可能就是“等比”平均律，但是他对等比律转调优点的认识，并非来自梅森或威克梅斯特17世纪的探索，而是来自于当时欧洲在调谐键盘乐器上的实践。一个调谐完美的键盘，每八度白键之间的黑键可以减少到五个，也就是说，每一个黑键的律音，可以是前白键律音的降半音，同时也是后白键律音的升半音[63]，因此，允许全面的调色变动。巴赫为“调节

完美的"平均律所作的前奏曲和赋格曲，虽然在音乐界激起一些兴趣，但仍然没有使等比律得到作曲家的重视[64]。约在18世纪末期或19世纪初[65]，随着主调音乐的兴盛，等比律的多功能性终于得到充分的发挥，成为欧洲古典音乐的主要音律体系之一。

朱载堉的等比律[66]在欧洲古典音乐中得到了普遍应用，应该是文化互补现象的一段佳话。然而，等比律最早出现在什么时候，出现在什么文化中，这些问题在19世纪形成了争论的焦点。有些欧洲声学史学者认为，等比律虽然因巴赫《十二平均律钢琴曲》才引起音乐界的注意，但是它在欧洲的出现可远早于朱载堉的推导。有些学者主张，等比律早在1562年就出于扎利诺之手，也有些人主张，萨利纳斯在1577年也提出过等比律。在这期间，欧洲声学史家的确发现了早于巴赫时代威克梅斯特在1691年和梅森在1636年关于"等比"平均律的推算证据。但是，要把等比律在欧洲的出现推前到16世纪，则是没有历史根据的，当时也曾有欧洲学者指出这一点。例如，1880年，埃利斯(A. J. Ellis)依据他对原著和历史史料的考查指出，扎利诺和萨利纳斯根本就没有提过等比律[67]。当时的欧洲声学史界认为，等比律在欧洲是一脉相承的，与朱载堉之等比律没有任何关系[68]。

值得在此指出的是，分析等比律在欧洲发展的史料，的确可以支持中国和欧洲分别发展等比律的看法，这是因为两方推导等比律的思路不同[69]。在欧洲，不论是梅森和威克梅斯特在17世纪的推算，或者巴赫在18世纪由调谐键盘上体会到的"调节完美的"平均律，都建立在同一思路上，那就是把最大音差等分，由生律音程分配到八度中各个律音上。这与朱载堉创建等比律的思路不一样，朱载堉的思路建立在转调与循环的关系上(见第5.2.1节)。如果在这段期间，欧洲律

学家没有纠缠于最大音差，而在原理上直接了解等比律，必然会与朱载堉一样，先解八度之十二次方根，去直接求等比律［见公式(5.1)和(5.2)］，而不会再兜圈子，如公式(5.23)所示，先解最大音差之十二次方根，增高五度，然后再用此音程导生等比律[70]。况且，求八度的十二次方根$\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$要比求最大音差的十二次方根$\sqrt[12]{\frac{524288}{531441}}$容易得多了。

埃利斯的批驳出现不久，关于等比律的争论又卷入另一个新高潮。1884 年，德·哈恩(de Haan)发表了一篇记载等比律推算的手稿，声称这是斯蒂文(Simon Stevin，1548～1620)没有发表的晚年遗稿[71,72]。令人惊奇的是，这篇手稿所载等比律推算，并不涉及最大音差，与欧洲等比律发展思路完全不同。斯蒂文的等比律推算，是直接求八度的十二等比分的，且和朱载堉一样，从推算 1 到$\frac{1}{2}$八度之间的中律开始。这里所说的斯蒂文的中律，即朱载堉所推算的蕤宾律$\sqrt{\frac{1}{2}}$(见表 5.2.1)。此稿在 1884 年发表后，引起多方面的猜测和争论[73]。

斯蒂文推算等比律的手稿，完成于他的晚年，不会早于 1605 年[74]，这就可以认定，等比律在 16 世纪从欧洲东传到中国的看法，纯属无稽之谈。因为斯蒂文的推算不可能早于朱载堉，更何况斯蒂文的手稿在欧洲，沉没了两个半世纪才获得发表，因此对等比律在欧洲的发展，也没有产生影响。在此值得提出的倒是，为什么斯蒂文等比律的推算和思路，与欧洲传统等比律的推算和思路没有相同之处，反而类似于朱载堉的推导？

斯蒂文(1548～1620)和朱载堉(1536～1611)虽属于同

一时代，但是在当时的欧洲殖民政策下，中西方文化的接触，在他们两人生活的时代，早已超过丝绸之路的贸易活动下的速度和范围。到 16 世纪，欧洲传教士早已在中国多处出现[75]。事实上，朱载堉等比律的推算，发表后仅十多年，传教士利玛窦（1552～1610）就在 1601 年进入了京城。入京之前，利玛窦已体会到中国文化对天文和历法的重视，他策划入京后要利用教会提倡的天文知识和观点，与朝廷和学术界人士打交道[76]。这条措施免不了要接触到中国的音律著作，因为中国人传统上把音律与天文同视为自然之道，通常把这方面的研究和观察混合编辑在一起[77]。朱载堉不但精通音律，同时也精通天文，他的著作横贯音律与天文两个领域[78]。此外，要推行传教的活动，音乐是一个重要的媒介，欧洲传教士在这期间接触到朱载堉的著作，是十分可能的。

李约瑟（Joseph Needham，1900～1995）在 1962 年出版的《中国科学技术史》第四卷第 1 分册中，提出他对这问题的看法，认为：

> 如果这同样的推算法，果然是［斯蒂文和朱载堉］在地球各一方，在相隔仅几年中各自单独解出，那真是一个惊人的巧合。[79]

他还指出，“一个接触到中国等比律观念的旅行者，只需记住一些极简单的小措施，就能把这一重要观念传给欧洲的数学家和音乐家。”他说：

> 如此一个旅行者仅仅只需要说：“我知道中国音乐家调谐他们的弦乐器的精确方法。他们只需把第一弦，以$\sqrt[12]{2}$除之，得第二音之弦长，再除之，得第三音之弦长，

继续如此重复，直到第十三音，就得出纯八度。”因此，传播这个重大的观念所需的，不是一本书，仅是一句话就够了。[80]

根据这些观察，李约瑟作出下列评论：

> 如果斯蒂文的推算果真没有受到中国等比律工作的影响，这是件不可思议的事情，因为等比律将是斯蒂文第二个先于中国的非常发明。斯蒂文的第一个先于中国的著名发明是帆车(sailing carriage)[81~83]。

斯蒂文等比律的推算，虽然极可能受到朱载堉的影响，然而，要建立欧洲的等比律是由中国西传过去的看法，还必须进一步证实，斯蒂文的推算推动了欧洲等比律的发展。从梅森的讨论中可以知道，估计均分最大音差的某些数据，出现在他推算“等比”平均律之前[84]，这只不过说明，均分最大音差的探索出现于梅森之前[85]。然而，把均分最大音差的探索，作为等比律推导的开始，这个观点是错误的[86]，因为从探索均分最大音差到推算等比律，在观念上仍然存在着一定的距离。此外，把均分最大音差数据的来源问题，看为梅森“等比”平均律推算受到斯蒂文的影响或朱载堉的影响，同样也是错误的。分析欧洲等比律的发展，至今没有发现受到斯蒂文任何影响的痕迹。上面已指出，梅森和威克梅斯特在17世纪的推算，以及巴赫在18世纪对“调节完美的”平均律的体会，都建立在等分最大音差的思路上，反观斯蒂文推算与朱载堉一样，根本就没有涉及最大音差的概念。这种思路上的不同，支持中国等比律与欧洲等比律具有分别发展可能性的看法，而不管斯蒂文的推算是否受到了朱载堉的影响。

5.4.3 对等比律的评价

等比律的出现，充实了音律学律制体系，与纯律和《吕氏春秋》三分损益律形成音律学的三大律制体系[87]。这三个律制的半音结构在第5.2节已作比较，从图5.2.3所示八度圆，可以方便地辨认三种律制的主要区别，就是等比律由同一半音所组成，三分损益律由大、小两种半音所组成，而纯律由四种半音所组成。由此可见，等比律具有全面等势循环的对称性，在转调功能上明显优越。然而，三分损益律是一个二比律[88]，从转调功能而言，仅次于等比律。

等比律虽然突破了纯律对作乐转调的约束性，超越了三分损益二比律旋宫转调的功能，但是从听觉美感而言，也有其局限性。表5.4.1给这三大律制各个律音的音程作了一个比较。表中为三分损益律列出黄钟和林钟两律，以便比较音程变化[89]。

从表中可见，除了八度音程之外，等比律没有与纯律相同的音程。也就是说，除了八度之外，等比律没有客观自然的协和纯律。在音程上，等比律就不如三分损益二比律。这是因为等比律八度之内的每一个律音都不纯，而三分损益律却保留了纯律的大二度、纯四度和纯五度[90]。缺乏纯律音，也正是音乐界对采用等比律态度犹豫的原因之一。从调式上来说，五声音阶的五个调式在十二律中可形成60个律调，七声音阶的七个调式在十二律中可形成84个律调，这些调式的多样性一直是音乐界所珍惜的。转调在作乐上的出现，也正是为了发挥多姿多彩的调式变动。然而等比音阶只能分辨大调和小调两个调式，在十二律中仅仅形成24个律调。调式的减少，是音乐界对采用等比律态度犹豫的另一原因。16世纪等比律在中国出现后，中国音乐界仍然以三分损益律为主律，并没

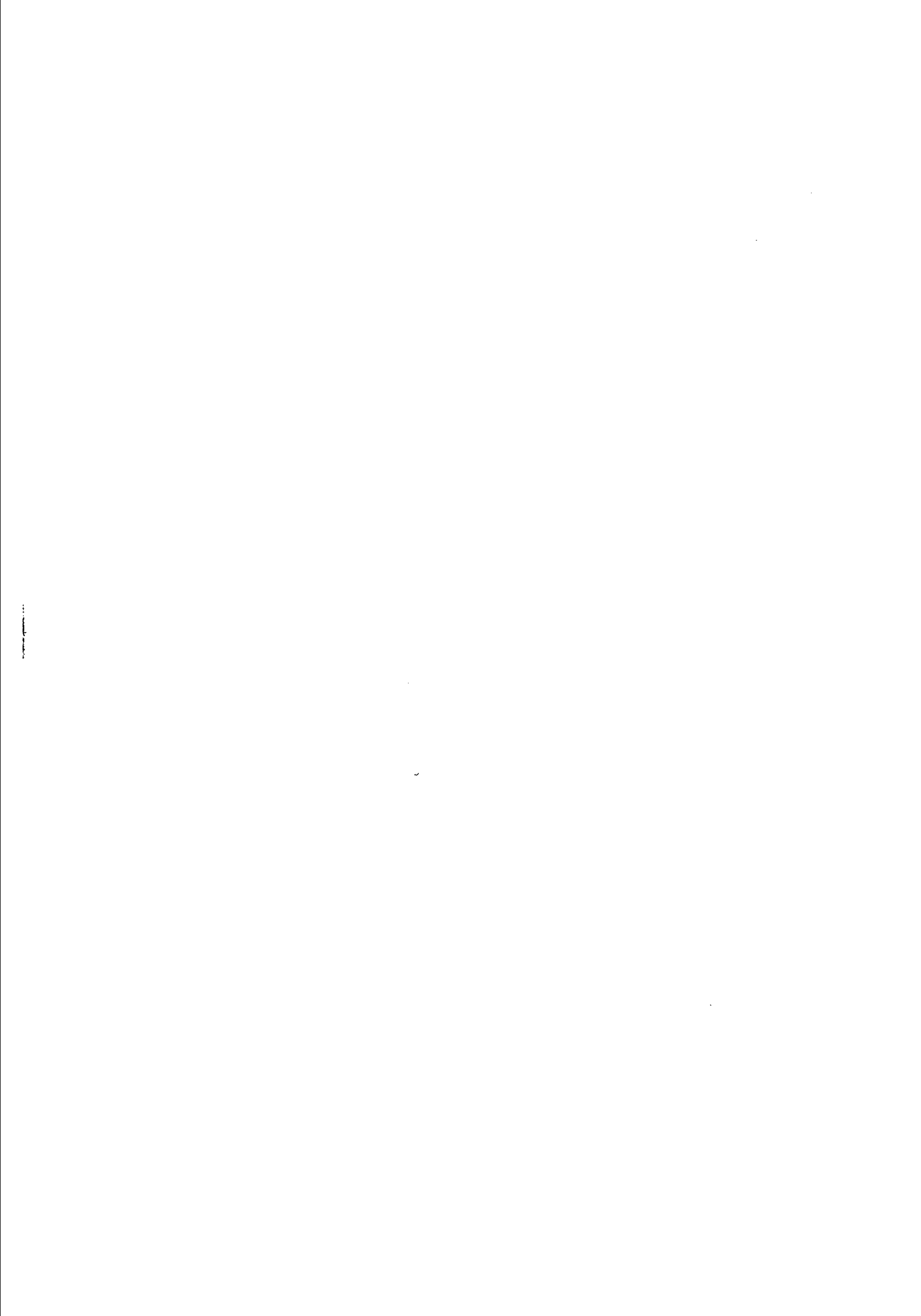
表 5.4.1 三大律制:等比律、三分损益律和纯律之音程比较

律调	朱载堉 等比律	三分损益 二比律(黄钟)	三分损益 二比律(林钟)	纯律 四比律
基音	1	1	1	1
小二度	$(2^{-\frac{1}{12}})$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{15}{16}$
大二度	$(2^{-\frac{1}{12}})^2$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$
小三度	$(2^{-\frac{1}{12}})^3$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{5}{6}$
大三度	$(2^{-\frac{1}{12}})^4$	$\frac{64}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{4}{5}$
纯四度	$(2^{-\frac{1}{12}})^5$	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
增四度	$(2^{-\frac{1}{12}})^6$	$\frac{512}{729}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{32}{45}$
纯五度	$(2^{-\frac{1}{12}})^7$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
小六度	$(2^{-\frac{1}{12}})^8$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{5}{8}$
大六度	$(2^{-\frac{1}{12}})^9$	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{3}{5}$
小七度	$(2^{-\frac{1}{12}})^{10}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{5}{9}$
大七度	$(2^{-\frac{1}{12}})^{11}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{8}{15}$
八度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

有采用等比律。17 世纪等比律在欧洲出现后,同样也没有及时采用。欧洲音乐界不仅没有放弃中音调律,而且继续追求在平均律中增强纯律协和音程(见第 5.4.2 节)。即使在欧洲音乐极有创造性的古典音乐阶段,虽然经过巴赫的推荐和在音乐转调上作出实际应用,等比律仍然再拖延了半个多世纪,到 19 世纪初才得到普遍采用[91]。

随着和声学在18世纪的发展,欧洲音乐界对和声的概念逐渐地扩增,在作乐的应用上也逐渐地出现选择的变化和重点的迁移。建立在“和弦”与“根音”及与“倍音”之间的关系,“和弦”在作乐上的应用,尤其是在主调音乐中,逐渐地推广[92]。主调音乐利用“和弦”各式各样的结构,及人耳对“合音”与“差音”的听感,心理的反应,创建出丰富的新谱和音色。在这个发展过程中,等比律的多功能性,尤其是其各调式的均匀性,转调的自由性,以及“和弦置换”的容纳性,得到了重视。等比律逐渐地形成主调音乐的主要律制体系[93]。

等比律虽然在中国没有能如在欧洲那样得到应用和发展,但这并不意味着应该贬低朱载堉等比律的成就和贡献。等比律在音乐中得到施展和发挥,并非是取代纯律和三分损益二比律,而是进一步充实了律制体系,给音乐创作增加了发挥的载体,给音乐家在和声上提供了新的自由。有史以来,音阶一直在逐渐地变化,律制的兴起和淘汰,随着时代在变换。近代电子声学的发展,给音律与和声在概念上和实践上都作出重要的革新,电子乐器可连续不断地变迁音律,音程也不再限于以半音程量子化。毫无疑问,音阶继续在逐渐地变化,律制体系继续在逐渐地扩增。然而,等比律就如纯律和三分损益律一样,毕竟是律制中的基本体系之一。



注　释

引言

1　有关欧几里得的生平和《几何原本》，早期记载来自普罗克洛斯（Proclus，412～485）。根据普罗克洛斯，欧几里得约在公元前300年住在亚历山大城，《几何原本》的证明是欧几里得自己作出的。

2　“弦图”中的内弦图，是赵爽证明勾股定理的图解，“弦图”中的外弦图则是商高证明勾股定理的“积矩法”。见程贞一“A Comparative Study of Early Chinese and Greek Work on the Concept of Limit. Appendix Ⅱ. The Dissection Proof of Shang Gao” in *Science and Technology of Chinese Civilization*（World Scientific，1987）pp. 35～44，图6和图8。

3　关于现存贾宪二项式系数应用和发展的记载，出现在13世纪杨辉的《详解九章算法》（1261）和朱世杰的《四元玉鉴》（1303）等书中。

4　在此我采用“革新”而不用“革命”，是因为“革命”一词含有推翻的意思。当时欧洲所谓的“现代科学”的确是新的科学知识，但是这些新的科学知识仍然是建立在多种古代文化的知识基础上，是一种科学知识的革新，而不是一种科学知识的革命。

5　Lucien Price，*Dialogues of Alfred North Whitehead*（Max Reinhardt，London，1954），p. 131。作者致谢俞懿娴教授提供此引语原文文献。

6　*Early Chinese Work in Natural Science—A Re-examination of the Physics of Motion，Acoustics，Astronomy and Scientific Thoughts*（Hong Kong University Press，1996）.

7　本编资料出自UCSD中国研究170科目自然科学史讲义（1984年）

和一篇英文论文,"A Re-visit of the Work of Zhu Zai-Yu in Acoustics" in *Current Perspectives in the History of Science in East Asia* (Seoul National University Press,1999), pp. 330 ~ 346, ed Yung Sik Kim and Francesca Bray。

8 古著中虽然没有纯律推导的直接记载,但推导十二半音纯律体系的角—曾法,可根据公元前5世纪曾侯乙钮钟铭文中的音名和音程结构,加以复原(见本书第3.5.2节)。

第1章

1 音的高低由频率的大小决定。频率大,音就高;反之,音就低。频率的常用单位叫赫兹。每秒振动一次,记为一赫兹。音量的强弱由振幅的大小决定。振幅大,音就强;反之,音就弱。音质,也称音色。不同乐器或人体发声器官发出的同一频率同一振幅的音,仍各有特色,区别就在于音色不同。不同的音色,决定于泛音(或谐音)的数目和相对强度。乐器不同的质料和结构形制,能产生不同的泛音,甚至同一乐器的不同音区,产生的泛音也不相同。——译者

2 作于公元前90年。——译者

3 到公元前475年至公元前221年的战国时代,这两个字的精细区别才逐渐消失。——译者

4 本节中,音律指音,只与频率相关,音律不直接等于乐律,几个音才有可能成为乐律。律学,也称音律学或乐律学,是声学的一个分支学科。汉字"律",除了律管这一层意思外,在音律学上还有以下几个含义:音高规律、半音、以某种数理方法调音得出的各个音高位置;或者构成"调音体系"(也称律制)的基本单位等。——译者

5 "律和声"讲音律与声响的关系。显然,音律只有实现标准化,才能协调各种音。标准一词是指衡量事物的准则,或本身合乎准则,可供同类事物比较核对的事物,如标准音、标准时。为适应科学发展和合理组织生产的需要,在产品质量、品种规格、零件部件通用等方面规定统一的技术标准,就叫做标准化。——译者

6 传说中约公元前22世纪末到公元前21世纪初。——译者

7 人耳音高的辨认又与持续的时间长度有关,例如1000赫兹的音,需持续0.013秒以上,才能分辨出来。——译者

8 《国语·周语》。

9 “六间”一语表明,周律系统中,这里列出的三吕律和三钟律是后来加上的。使用双字词(如黄钟)来记载律名的做法,出现得相当早,散见于商朝编磬等出土乐器的铭文上(参见第3.1节)。

10 《国语·周语》。

11 *De Institutione Musica*, ed. G. Friendlein. bk. 1, secs. 10~11, pp. 197~198.

12 音量即声音的强弱。物理学上称为强度,由气压迅速变化的振幅(声压)大小所决定。声压的计量单位为微巴。响度表示声音听起来有多响的程度,主要随声音的强度而变化,但也受频率的影响。响度计量单位为分贝。根据1000赫兹音的不同强度声压,取比值常用对数的1/10而定。两者量的关系,按古典的心理物理学规律,响度与强度的对数成正比。声音在强度大到10倍时,听起来才响了一级(10个分贝),强度大到100倍时,听起来才响了二级(20个分贝)。——译者

13 《国语·周语》。

14 听阈分强度和差阈。声音不够一定强度时,就不能引起听觉。在多次作用中能有50%的次数引起听觉的最小声压级称为强度阈(也称听阈)。听阈有个体差异,所谓正常听阈,是一些听力正常的年轻人的听阈平均值。听阈随频率而变化,500到4000赫兹的阈值最低,在它们之上和之下的高频声和低频声的阈值都较高,最敏感的频率是3000赫兹左右。——译者

15 发音体全段振动产生的音叫基音,全段各部分振动产生的分音叫泛音或分音。由基音和泛音合成的复合音,在物理上称为分音列。——译者

16 类似于用麦克音古木(mcingo wood)确定单簧管的音色。

17 传说中约公元前22世纪末到公元前21世纪。——译者

18 A. Schaeffner (1936), p. 124.

19 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), “Sound (Acoustics)”

(with Kenneth Robinson), p. 142.

20 杨荫浏(1981),p.41。

21 例如,吹箫时因送气急缓而发出的音色变化。《左传》、《周礼》、《兵书》等古著中多有记载,讲到这类音色变化在不同场合下的不同解释和判断。——译者

22 古琴,原名为琴,后来为区别于胡琴、扬琴等乐器,又称为七弦琴。近代才把它称为古琴。——译者

23 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 132.

第2章

1 《易经·说卦》。

2 《国语·周语》。

3 《榖梁传·隐公》。

4 《考工记》"凫氏为钟"段。

5 《管子·地员》。当前版本中,脱"音舒以浊"一句。

6 《考工记》"凫氏为钟"段。

7 《庄子·杂篇》。

8 《吕氏春秋·召类》。

9 《春秋繁露》。

10 《庄子·杂篇》。

11 《淮南子·齐俗训》。

12 据长安客省庄出土文物,约公元前2800年到约前2100年的龙山文化时期,相当于古代传说中的黄帝时期,出现过一种无舌的陶钟。

13 音程指两音间的音高距离。两音同时发出,称和声音程;两音先后发出,称旋律音程。——译者。

14 随县擂鼓墩一号墓考古发掘队(1979)。

15 《梦溪笔谈·补笔谈》,乾道版。

16 林瑞等(1981),图3。

17 编钟为合瓦式,因此钟体在两瓦相接之处有交线,含有这交线的平

面正是编钟的主对称面，这种特殊构造形成多组不等势的敲点，可发出不同的音响。此外，在交线上，虽然每点钟体相连，但其一阶导数都不连续。这种正切的中断对钟声的衰减有增快的作用。——译者

18 上海博物馆青铜器研究组（1982）。测量工作由复旦大学潘笃武、刘贵兴以及上海博物馆马承源、潘建明完成。

19 现代声学知识告诉我们，只有当一个振动模式的波节线落在另一个振动模式的波腹线上之时，特型钟的两个振动模式才能各不相扰地分别激励，产生相应的共振频率。——译者

20 贾陇生等（1981）。对 M－3－2 钟的全息图由湖北省博物馆发表在《曾侯乙墓》（1989），卷二，图版 294。

第3章

1 我们现在知道，这就是所谓不协和音。——译者

2 浙江省余姚河姆渡地区出土的骨哨，用禽类肢骨做成，有好几种类型，共有二十几支，多数可以吹奏五声音阶或七声音阶较复杂曲调。——译者

3 陶埙用陶土烧制而成。近代在西安半坡仰韶文化遗址出土的无音孔陶埙和 1 音孔陶埙，浙江河姆渡文化遗址出土的 1 音孔陶埙，山西万荣县、甘肃玉门火烧沟等地新石器时代遗址出土的 2 音孔陶埙和 3 音孔陶埙，经考古测定为距今 6700 到 7000 年前新石器时代中期的产物。河南辉县琉璃阁殷墟出土的埙，已发展到 5 个音孔，能吹出完整的七声音阶和部分半音。制作材料有石、骨、玉、象牙和陶土等多种，形状有球形、管形、鱼形和梨形等，以陶土烧制的梨形埙最为普遍。——译者

4 河南省文物研究所（1989）。

5 从第二舞阳文化层取出的两个样本，测定日期分别为 7137 ± 128（校正为 7762 ± 128）和 7105 ± 122（校正为 7737 ± 122）年前。

6 见黄翔鹏（1989）。

7 据《双剑诊古器物图录》，此三枚编磬原为于省吾收藏，现收藏在北京故宫博物院。

8 李纯一(1981),p.40。

9 李约瑟和鲁宾逊也作过类似的比较,不过他们误解了中国十二律音阶,把用“五度旋生”的“八度”作为八度(见第4.2.2节),因而他们的数据是基于错误的基础(见第4.2.2节)。

10 必须说明,上下五度相生法是后世的成果,在此只是指出这套商代石磬已具有五音的三度音列。

11 程贞一(1984)。

12 因此可以称为相对音阶。——译者

13 什么叫“旋宫”?用现代的概念来说,就是调高的改变。按民间的一般说法,就是“调门”高低的变化。一段音乐,原来是C调(即以C音作宫音),又变到G调(改用G音作宫音)去演奏、演唱,这就是旋宫。同一段音乐中,前面是C调的,后面又变成别的调门,这也是旋宫。中国古代的旋宫,是指宫音在十二律的位置上移动时,五声或七声音阶各音名的位置也随之移动;十二律每律皆可作主音,故称为十二律“旋相为宫”法。采用某种生律法,其结果若能产生一个完全八度(例如,从黄钟开始,经过若干次计算,得到清黄钟,即其弦长精确地等于黄钟的一半,或其频率精确地等于黄钟的2倍),就意味着这个律制能够做到“周而复始”或“还原为宫”。在中国古代,由于模拟自然界中具有泛音列关系的动物的声音,公元前5000年仰韶文化的陶埙就有纯律倾向。先秦的编钟,在采用三分损益律的同时,也有许多音程倾向于纯律。特别在强调运用泛音徽位的古琴中,纯律音程得到充分应用。——译者

14 《孟子·离娄》。

15 曾侯乙编钟的出土,使我们能有机会研究周代音、律和调式术语的平行体系。

16 见杨荫浏(1981),p.26和李纯一(1981),p.48。

17 各种律制必须有某个音作基础,方可算出其他各律。演奏演唱时必有某个固定音高的音作为统一定音的标准,这个音称为标准音。中国古代一向以黄钟为标准音,但历代的高度不尽相同。近现代各国是以a^1为标准音,从17世纪末到18世纪,其高度也不尽相

同。1838 年欧洲一些物理学家在德国斯图加特会议上,把标准音的振动频率定为 440 赫兹。1859 年,在法国巴黎科学院召开的音乐家和物理学家会议上,又把标准音的振动频率定为 435 赫兹。现行的国际音高标准为 1939 年 5 月国际标准协会在伦敦通过的 $a^1=440$ 赫兹。——译者

18 见湖北省博物馆(1988)。

19 谭维四(1988)。

20 《管子·地员》。

21 参见表 3.5.1 中最右列的纯律比数据。——译者

22 应该注意到,频率是后来拟定的概念,上下相生只是指振动弦长度的增加和减少。因此,上生导致弦变长,发出音较低,而下生导致弦变短,发出音较高。

23 即 $\left(1-\frac{1}{3}\right)\times 2=\frac{4}{3}$。——译者

24 纯八度:在乐音体系中具有同样名称的相邻两个音,叫纯八度。也指调式中主音到主音的八度。——译者

25 程贞一(1987), pp. 168 ~ 170。

26 设定为 81。——译者

27 值为 144,弦长值越大,发出音越低。——译者

28 $108\times\frac{2}{3}=72$,弦越短,音越高。——译者

29 设定初始值 81。——译者

30 弦长增加一倍,成为 $72\times 2=144$。——译者

31 $108\times\frac{4}{3}=144$。——译者

32 对照表 3.5.1 中最右列纯律比的数据。——译者

33 当然定 C 律音的频率与黄钟律的频率不同,但十二律的顺序是一样的。中国十二律的律名和顺序,根据《国语》所载周景王与乐师州鸠的对话(见第 1.1 节),在公元前 522 年已成立和使用,最迟也应在《国语》成书年代成立和使用,远早于欧洲(见第 5.1 节)。只是近代音乐界采用了西方传统律名、音名和符号,对中国传统逐渐

生疏,很少提起十二律的历史背景。这些符号的使用,纯为读者的方便,在观念上和理论上都没有需要。

34 见程贞一(1987),pp. 171 ~ 176,以及程贞一(1994)。

35 根据这个模式,不难看到,编号标为上三组二号(T-3-2)钟的旁边,阙失一钟,它本该发“宫”音和“徵曾”音。出土时占据上三组空缺位置的、编号标着上三组一号(T-3-1)的那口钟,实际上属于上二组。

36 程贞一(1987),p. 163,图2和p. 174,图7。

37 此表的测音数据来自曾侯乙编钟的三次测量报告(表中分别标以a、b和c),测音的条件与方法如下:

(a) 1978年7月,文化部文学艺术研究院(现中国艺术研究院)音乐研究所用频闪仪(stroboscope)测定的数据。测音地点在随县文化馆内,工作温度30 ~ 32℃。测音方法是,先测出每个乐音的音名及其正负音分数,然后换算成相应的频率。每次测音前,用德国制标准音叉校正测音仪器的频率,最大误差率为±1音分。(见王湘,pp. 71 ~ 73。)

(b) 1979年1月,上海博物馆青铜器研究组与复旦大学物理系用PB-2型频率仪,结合示波器利萨如图形所得频率读数的数据。测音地点在湖北省博物馆陈列室内,工作温度10℃左右。测音方法是,用微音器显示出利萨如图形,乐音频率直接由频率仪显示出来,然后换算成相应的音名及音分数。仪器的最小误差为1.5‰(折合音分值为5音分强)。(见上海博物馆青铜器研究组,pp. 90 ~ 92。)

(c) 1980年10月,哈尔滨科学技术大学二系通过正弦电信号激励钟体共振,将声音记号输入示波器,与PB-2频率仪和XFD-7A型低频信号发生器所发标准信号比较等方法测定的数据。测音地点在湖北省博物馆陈列室,工作温度28℃左右。测音方法是,用正弦电信号激励钟体共振,使其发出不同的音响,将声音信号输入示波器,与频率仪和低频信号发生器所发出的标准信号比较,观察示波器显示的利萨如图形,声音频率直接由频率仪显示出来,然后换算成相应的音名及音分数。在测音的同时,进行了激光全息照相,

记录和测定其振动模式,确定其振幅和节线位置。(见湖北省博物馆(3),vol. 1,pp. 110 ~ 115。)——译者

38 程贞一(1987),p. 183。

第4章

1 古代王朝设置国史馆,形成修史制度。首先是纂修实录,即以编年体系记录每一帝王在位时的大事。唐代和宋代的实录已散佚,明、清两代实录基本上保存完整。国史馆还修"国史"即当代史,但历代国史随着王朝的更替,多已湮没无闻。其次,历代国史馆都纂修前代的历史,如《旧唐书》、《旧五代史》等等,直到清代修《明史》,完成了一套纪传体的后世称为"正史"的《二十四史》。《二十四史》中的重要内容之一,就是律历志。

2 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 132.

3 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 128.

4 见 *Fonti Ricciane, Storia dell' Intridyzione del Cristianesimo in Cina,* 1597 ~ 1611 (Rome, 1949), ed. Pasquale M. d'Elia, vol. II, p. 70。《利玛窦中国札记》,利玛窦、金尼阁著,何高济、王遵仲、李申译,广西师范大学出版社, 2001, p. 253。

5 关于原著发表确切日期的最新考证,见戴念祖(1986),pp. 91 ~ 97。也见 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), pp. 214 ~ 228。

6 E. Chavannes (1989), *Les Mémoires Historiques de Se-Ma Ts' ien*, vol. 3, p. 642.

7 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), pp. 177.

8 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), pp. 126 ~ 228.

9 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 177.

10 Aristotle, *Metaphysics* I, 1.

11 Iamblichus, *Introductio Nicomachi Arithmetic* (Tennulius' ed), pp. 141 ~ 142, 168.

12 Nicomachus, *Encheiridion Harmonices* (Meibom's ed.), bk. I. p. 10; Boethius, *De Institutione Musica*, ed. G. Friedlein, bk. 1, secs. 10 ~ 11, pp. 197 ~ 198.

13 见附录,"Essay on the Sonorous Stone of China",载 Amiot 的 *Mémoire sur la Musique des Chinis tant anciens que moderne*, 1780。

14 "齐"通"剂",意为公式或处方。

15 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 180.

16 最新考古证据表明,这些公式的出现不晚于公元前 5 世纪,也许还要更早,见闻人军(1984)。

17 见李仲达等(1984)。

18 此日期以楚王酓章所送镈钟上的铭文为基础,曾侯乙大约卒于公元前 433 年。

19 这个传统的说法也为科学界广泛接受,例如,见 *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley Publishing, 1963), vol. I, pp. 501 ~ 504。

20 Ernest G. McClain (1985), 147 – 173.

21 例如,见德国天文学家开普勒(Johannes Kepler, 1571 ~ 1630) 的 *Harmonices Mundi libri V*。

22 Plutarch, *Moralia*, "Creation of Soul" (John Philips 译, 1694), 也见 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 181。

23 模式,某种事物的标准形式或使人可以照着做的标准样式,如模式图、模式化。辨认:根据特点辨别,做出判断,以便找出或认定某一对象:如辨认笔迹。——译者

24 《国语》所载, 有关由六律通过六个间隙律,导构十二律的讨论,见本书第 1.1 节。由此记载我们可以确定八度中十二音的概念,并不是以一年分为十二个月作为模式而归纳出来的。即使八度分成

十二半音的实施，果真以一年分成十二月作为模式，然而十二半音本身的推导（见本书第3.5节），仍然是独立的，建立在音律声响原理上，与天文历法原理无关。

25 描述毕达哥拉斯音调的发现过程时，Jacob Bronowski (1973)说：

> 毕达哥拉斯发现，弦长度精确划分成整数之比的和弦，和弦的声音使耳朵——西方耳朵——产生愉悦感。(156 页)

句中限定短语"西方耳朵"似乎另有所指。

26 纯八度：在乐音体系中具有同样名称的相邻两个音，叫纯八度。也指调式中主音到主音的八度。——译者

27 Wilmer T. Bartholomew, *Acoustics of Music* (Prentice Hall, New York, 1952), pp. 163 ~ 164.

28 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 172.

29 程贞一(1984)。

30 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), pp. 213 ~214.

31 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 170.

32 值得注意的是，按古代中国的习惯，一个音阶只需提及其八度内的律音就已足够明确了。因为音阶的八度音，不言自明的是基音重复的高八度。例如，要指及角调五声音阶，只要指出角、徵、羽、宫和商五个八度内的音就行了，音阶的八度音无需提出，就能明白无误地理解为角的高八度。同样黄钟十二律音阶，只要指出八度内以黄钟为基音的十二半音就齐全了，音阶的八度音自然就是高八度的黄钟律。

33 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 174.

34 乐律家京房（公元前77 ~ 前37年）应用上下五度相生法，从生律

12 次扩大到生律 60 次,得到六十律的音高,形成 60 个微音的微音音阶。必须强调,京房的工作时间相当晚,而且他并不用上下相生法生出八度音或八度外的任何一个音,所有 60 个微音,统统局限在一个八度范围之内。

35 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 176.

36 毕达哥拉斯音阶中音的次序,也已用希腊利第亚调式确定,见 Frederick V. Hunt, p. 16。

37 见湖北省博物馆(1), pp. 4 ~ 13。

38 历来有关古希腊调式音程变化的研究极少。早期的希腊音阶系统,现在已无法了解。例如,表 4.2.1 和表 4.2.2 所对比的爱奥利亚调式,尽管在古希腊可能早已长期使用,但事实上要到 16 世纪才得到教会正式承认。近年来关于古希腊调式的研究,见 R. P. Winnington-Ingram (1968)。

39 由于黄钟律在中国音律学中具有重大的意义,探讨《吕氏春秋》的选择是否故意要把"四度差值"安排在黄钟律调中,将是十分有趣的课题。叙述这段以上下相生法推导十二律的作者提到,黄钟律是用上生法得到的,因此,必然意识到上生黄钟律这个律的存在。由此可见,《吕氏春秋》所载之十二律并不是唯一可能的选择,其作者同样能够等价地进行另一种挑选,不用仲吕律而用上生黄钟未命名的 F′律。

40 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 161.

41 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), p. 162.

42 例如,见程贞一(1987),图 2 和图 7,163 页和 174 页。

43 管乐器管内的空气,呈柱状。演奏时,吹气送入气息:在长笛、竹笛中,气息与吹口边缘冲击;在单簧管、唢呐中,气息鼓动吹口的簧片;在小号、圆号中,气息鼓动吹口上的嘴唇,都激起管内气柱振动,发出声音。气柱振动与弦振动不同的是,管内气柱振动时,气柱的一部分要突出在管口的外面,即气柱的长度略长于管长。因

此,以管长计算气柱的频率,必须依照管的孔径作“管口校正”。——译者

44 当时的弦乐器,除了琴、瑟之外,还有筝和筑。虽然古书多处记载琴和瑟,但出土的古代乐器中,除了湖南长沙出土过一把战国时代的瑟外,弦乐器极少,没有早于汉代的琴。——译者

45 除了直接提到瑟和琴外,《尚书》也通过八音这个术语间接提到弦乐器,丝这个音色是八音色中的一个。见本书第1.2、第1.3节。

46 黄翔鹏(1992)。

47 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), “Sound (Acoustics)” (with Kenneth Robinson), p. 160.

48 《史记》记载,小二度$\frac{1024}{2187}$,小三度$\frac{8192}{19683}$,纯四度$\frac{65536}{177147}$,这些数据比其他九律数据要高八度,毫无疑问,所有这些比率是用上下相生法算出的(见图3.5.1和图4.2.2八度结构)。

49 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), “Sound (Acoustics)” (with Kenneth Robinson), p. 173.

50 Philolaus, frag. 6 (Freeman 译),见 *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 1st ed., 1903, Hermann Diels 主编;5th ed. W. Kranz 主编 (Wiedmann, Berlin, 1934 ~ 1937);这些残卷段落的完整翻译,见 Kathleen Freeman, *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers* (Harvard University Press, 1948), p. 74。

51 《左传》和《国语》等经典著作中,有七音和十二律等术语。在实践上,如出土古乐器所示,这些音阶在中国文明中出现得非常早(见第3.1节)。尤其是出现于1987年在考古发掘中发现的公元前6000年的七孔骨笛(见图3.1.1)的七声音阶。

52 Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h), “Sound (Acoustics)” (with Kenneth Robinson), p. 172.

53 这四个数称为生成数。现举时钟上12个整点数字为例加以说明。从任一个数字出发,利用生成数1,1格1格走,能到达所有整点数字。5格5格走,7格7格走,11格11格走,也能如此。除1、5、7和11之外的其他数,例如3,就没有这个性质了。例如从2出发,

3 格 3格走,只能到达整点数字 5、8、11 和 2,到不了所有整点数字。——译者

54 这对应着导生一个纯四度,然后把这纯四度降低一个八度。

55 见《律学新说》(1584)。关于原著的最新考证,见戴念祖(1986)。也见 Joseph Needham (1962),vol. 4,sec. 26(h), "Sound (Acoustics)" (with Kenneth Robinson), pp. 214~228。

第 5 章

1 本章资料出自 UCSD 中国研究 170 科目自然科学史讲义(1984年)和一篇缩写的英文论文"再论朱载堉的声学著作",曾宣读于在韩国举行的第 8 届 ICHSEA(1996 年)上,并发表于 *Current Perspectives in the History of Science in East Asia* (Edited by Yung Sik Kim and Francesca Bray, Seoul National University Press, 1999), pp. 330~346。

2 见随县擂鼓墩一号墓考古发掘队(1979)和《曾侯乙编钟研究》(1992)。

3 以毕达哥拉斯(约公元前 6 世纪)命名最大音差,并不符合历史事实,因为最大音差并非出于毕达哥拉斯之手,而是出现于后世。

4 见 Bartholomew, *Acoustics of Music*, 1952, p. 180。

5 关于欧洲平均律的发展,见第 5.4.1 节和第 5.4.2 节。

6 见 Glen Haydon, *Introduction to Musicology* (Prentice-Hall, New York, 1950), pp. 32~34。

7 事实上,《管子》第 58 章《地员》所载推算五声音阶的方法,也就是三分损益相生法,与《吕氏春秋》所载方法相同。十二律在中国的出现远早于《吕氏春秋》时代,而且在公元前 5 世纪曾侯乙编钟音阶中,已经不出现最大音差。最大音差的问题如果在古代中国出现,必然早在《吕氏春秋》十二半音推算的记载前,就有了适当处理。

8 近年来对朱载堉十二平均律的讨论,见:杨荫浏(1986),pp. 25~81(1937 年第一版);Joseph Needham (1962), vol. 4, sec. 26(h),pp. 214~228;缪天瑞(1983), pp. 142~147;戴念祖(1986),

pp. 64 ~ 81。

9 此书卷一第 4 节中，朱载堉发表了他研究十二平均律的结果，但没有详细介绍方法。1596 年的《律吕精义・内篇》卷一，才讨论了详细算法。

10 近年来关于朱载堉十二平均律的讨论，见刘钝（1995），pp. 287 ~ 289 和李兆华（1995），pp. 204 ~ 207。

11 《律吕精义・内篇》卷一，第 3 节，p. 9。

12 宋代嘉定刊本（1213）。

13 图 5.2.1 所示，当然是圆周而不是圆周率 π，两者之间尚相差一个圆直径因子。若取直径为一尺，则两者数据相等。

14 《律吕精义・内篇》卷一，第 3 节，p. 9。

15 在朱载堉时代，开方根符号尚未在传统数学中出现，朱载堉用推算到 25 位有效数字的数据 1.414213562373095048801689 来表达 $\sqrt{2}$，的确是一个十分逼近的表达方法，其精确度具有科学意义。

16 《律吕精义・内篇》卷一，第 3 节，p. 9。

17 十二律的排序见图 3.5.2，其来源见第 1.1 节中关于六律、六间的讨论。

18 《律吕精义・内篇》卷一，第 3 节，p. 9。

19 《律吕精义・内篇》卷一，第 3 节，p. 10。

20 单位“尺”因乘以黄钟律 1 尺（即 10 寸）和除以应钟律 $\sqrt[12]{2}$尺而得消除，故得比率$\frac{1}{1.059463094359295264561825}$。此数据代表等比律的半音率$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$。

21 见图 3.5.2 和图 3.5.7。

22 《律吕精义・内篇》卷一，第 3 节，p. 10。

23 三分损益相生法所用的数据为$\left(1-\frac{1}{3}\right)$和$\left(1+\frac{1}{3}\right)$，即$\frac{2}{3}$和$\frac{4}{3}$。因为$\frac{4}{3}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}$，故所用数据相当$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{2}$（见第 3.4 节和

图3.4.1)。

24 二比律虽不是全面等势对称,但与等比律不同,保存了一些主要纯律谐和音程,例如纯四度和纯五度,见第5.4节和表5.4.1。

25 《律吕精义·内篇》卷一,第4节,p.10。

26 上面已讨论过"旧法往而不返之误",来源于所用数据错误,而不是三分损益相生法步骤出现了什么错误。

27 用八度圆表达三分损益相生法的途径,出现在朱载堉同时代程大位(1533~1606)所著《新编直指算法统宗》,见卷十七的律吕相生图。

28 《律吕精义·内篇》卷一,第4节,p.10。

29 由于振动频率概念尚未出现,古代对律的定量概念,建立在发音振体长度概念的基础上,所以律的长与短,就指律的低与高。

30 值得注意的是,在二比律体系中,上下四度相生法所导生的十二律,与上下五度相生法所导生的十二律,两者是相等的(见第4.5.1节和图4.5.3)。

31 《律吕精义·内篇》卷一,第4节,p.10。

32 见《尚书·舜典》。

33 见杨荫浏(1981),p.26和李纯一(1981),p.48。

34 见程贞一(1987),pp.183~184。

35 常常取黄钟律管的孔径作为公共孔径。9分这个数据首见于《汉书·律历志》"黄钟九寸,空围九分"一语。

36 见《月令·章句》。

37 见《礼记·月令》序。

38 见《晋书·律历志》。

39 《律吕精义·内篇》卷二,第5节,p.31。

40 朱载堉评价"长短虽异,围径皆同"方法,"此未达之论也",是一个谨慎的观察。因为在朱载堉时代,此法尚未能得到确认。现代声学表明,此法虽在朱载堉时代"未达",但也是可以实现的[见第5.3.3节,公式(5.17)]。

41 《律学新说》卷一,第6节。

42 《律吕精义·内篇》卷二。

43 一支律管的基音频率 f_n，是由其长度 l_n 和孔径 d_n 在标准环境下确定的。既然管长由弦长比率而定，朱载堉就可利用孔径，自由地设置标准律。这是因为已知等比律的弦长比率，仅仅固定了各律之间的关系，并没有固定律的绝对频率，定弦律的频率还需要求得弦的张力，定管律的频率还需要确定孔径。

44 《律吕精义·内篇》卷二，第5节。

45 朱载堉对此比率的叙述不怎么明确，可能只是一个直觉结论。这与借用几何等比关系作为新律八度和半八度的数值框架，在推理上是不同的。

46 《律吕精义·内篇》卷二。

47 《律吕精义·内篇》卷二。

48 这是因为 $L_i/L_1 = S_i/S_1$。

49 见第4.3节，管口校正公式(4.6)和公式(4.7)。

50 见刘复(1986)；Mourice Courant (1912)，pp. 85～86；Victor Charles Mahillon (1890)。

51 见杨荫浏(1952)，pp. 301～304。

52 见缪天瑞(1983)，pp. 146～147；戴念祖(1986)，pp. 106～110。

53 七声调式和五声调式在结构上十分相似，都是由两个"音列"和一个"整音"组合而成。所不同的只是"音列"。五声调式所用的"音列"是"三音列"，而七声调式所用的是"四音列"。

54 虽然西班牙律学家萨利纳斯在1577年给施利克的中音调律作过重要的改进，但仍然没有能增强中音调律转调的容纳性。

55 键盘乐器为了容纳这些升降半音不兼容的律音，通常在键盘上增加黑键。有些"非等比"平均律所需的黑键数目远远超过白键。

56 巴赫这48首曲集的德文原名是 *Das Wohltemperiente Clavier*，早期的英文翻译通常是 *Well-tempered Clavichord*。近代学者指出，德文"Clavier"一字的含义，不应仅限于击弦古钢琴(clavichord)，也应包括钢琴(pianoforte)，从而主张改译为 *Well-tempered Clavier*。中文翻译为《十二平均律钢琴曲》。同时也值得指出，巴赫这48首"前奏曲"和"赋格曲"是在1722年到1744年完成的，而巴赫本人在1747年拜访腓特烈大帝(Frederick the Great)时，才第一次见到钢琴。

当然,这 48 首曲的演奏,只与音阶有关,并不局限于特定的键盘乐器。

57 在欧洲,术语"equal-temperament"专用于表示等比律,以区别"非等比"的平均律。然而,有些学者称朱载堉的等比律为平均律,这是不妥当的。朱载堉推导等比律的思路,建立在转调与循环的关系上,而不是建立在均分音差的概念上。在欧洲,均分音差的概念出于最大音差的问题。然而在中国,没有任何记载最大音差的痕迹,如果最大音差问题果真出现于古代中国,那么最迟到公元前 239 年,随着三分损益相生法的出现,就已解决(见第 5.1 节)。实际上,三分损益律是最早的一种重要的"非等比"平均律。

58 见肖尔斯(Scholes)在他《牛津音乐指南》(*The Oxford Companion to Music Oxford*, 1950), p. 924 中的讨论。

59 见 Harmonie Uniserselle (1636 年,巴黎), 2 册, 11 节, p. 132。

60 见克罗生(Closson)在 *History of Piano* (1947 年,伦敦)一书第 56 页的讨论。

61 理论上,朱载堉推算的数据也是近似值,这是因为等比律半音程的率涉及无理数$\sqrt[12]{2}$,在朱载堉时代,开方根符号在中国传统数学中尚未出现。朱载堉虽然没有用符号,但是他清楚地说明了开方根次数和度数。此外,朱载堉没有用任何近似法,他开方根"算法化"的叙述是正确的,而且开方根得到的数据精确到 25 位,1.059463094359295264561825。从现代科学高度来分析,的确可以说,朱载堉的数据精确地代表了无理数 $\sqrt[12]{2}$。

62 值得注意的是,求八度的 12 次方根,要比求最大音差 12 次方根容易。

63 换言之,不论键盘上的黑键或白键,每个前一键律音的降半音与后一键的律音相等,后一键律音的升半音与前一键律音也相等。升降半音间的这个关系,大大简化了键盘的编制。

64 即使如此,等比律在欧洲的遭遇,还是要比在中国的遭遇好得多。等比律 1584 年在中国出现之后 60 年,音乐界就经历了改朝换代,之后清代的音乐文化陷入了一个没有特殊创造性的时代,等比律

在中国根本就没有得到施展的机会。等比律 1636 年在欧洲出现后，虽然经过 86 年后，它的转调功能才得到音乐界的体会，经过一个半世纪后（约在 1800 年）才得到音乐界的接受，可是，也就是在这期间，等比律遇上了欧洲音乐文化最有创造性的时代，终于得到充分的施展机会。

65 见 Karolyi, *Introducing Music* (Pelican, 1969), p. 131，以及 *The Harvard Brief Dictionary of Music* (New York, 1960), p. 93。哈丁（Harding）在他的《钢琴发展史》（*A History of the Pianoforte*，剑桥，1940 年）中提出一些迟至 19 世纪中期的例子，见 p. 218。

66 按西方学术界的传统，通常以最先发现人的名字命名一个新发现。即使等比律在欧洲的发展与朱载堉的工作没有任何关系，朱载堉等比律推导出现于 16 世纪（1584 年），仍然早于梅森（1636 年）和威克梅斯特（1691 年）17 世纪的推算。因此，根据这个传统，等比律的创导应归功于朱载堉。然而在西方著作中，每当介绍或讨论到等比律（equal-temperament）时，通常不提朱载堉的成就。例如，Haydon, *Introduction to Musicology* (New York, 1950) 或 *The Harvard Dictionary of Music* (Harvard University Press, 1944)。这种双重标准的举措是不可接受的。

67 见《皇家艺术学会杂志》（*Journal of Royal Society of Arts*），1880 年 294 期，p. 401。

68 例如，巴伯（Barbour）的《等比律之发展史》（1932 年博士论文，Cornell University）。著名的《哈佛简明音乐字典》（*The Harvard Brief Dictionary of Music*, New York, 1960），仍然主张等比律是由威克梅斯特在 1691 年发明的。

69 除思路不同之外，在发展途径上也有不同。等比律在欧洲的发展偏重于实践，利用调谐键盘乐器作尝试；而在中国，等比律的发展偏重于理论，利用律管标准化等比律。

70 虽然欧洲之法与朱载堉"相生有四法"的"其一"有相同之处，但朱载堉是在解八度十二次方根，求等比律半律音程之后，才作"相生有四法"分析的。而且，他在"其一"法所用的生律音程，是由等比律半音求得的，根本就没有涉及最大音差概念。

71 de Haan,"*Van de Spiegeling der Singkonst*" *et* "*Van de Molens*"; *deux Travités inédits* (Amsterdam, 1884).

72 见萨顿(Sarton) *Isis*, 1934 年, 21 期, p. 243。斯蒂文未发表的两卷遗稿,经过他儿子亨德里克·斯蒂文(Hendrik Stevin)的收集和编辑,早已发表,此篇等比律手稿是在 1885 年由德·哈恩发现的。

73 例如, Fokker, *Rekenkundige Bespiegeling der Muziek* (Gorinchem, 1945), p. 18。

74 见德·哈恩 1884 年的论文和蒂斯特豪斯(Dijksterhuis)的书 *Simon Stevin* (Gravenhage, 1943), p. 276。

75 在 1565 年,澳门已成为欧洲传教士到中国之后学习中国风俗文化的训练中心。早期欧洲传教士在中国的活动,见方豪《中西交通史》(台北, 1953), 1 ~5 册。

76 见《中华早期自然科学之再研讨》(英文版), pp. 228 ~241。

77 在第 4 章中已指出,声学与天文学这两门自然学科,在中国文明中最早识别为正式学科,也最早与数学建立了关系。相关记载很早就收入了朝代史中的《律历志》。

78 例如朱载堉 1595 年的天文著作《圣寿万年历》。这也正是利玛窦和其他传教士在北京所见的中国天文学著作之一。

79 见李约瑟《中国科学技术史》(英文版), 卷 4, p. 225。

80 见李约瑟《中国科学技术史》(英文版), 卷 4, p. 224。

81 见李约瑟《中国科学技术史》(英文版), 卷 4, pp. 227 ~228。

82 有关帆车的发明和传播,见杜芬达克(Duyvendak) 1942 年的论文, p. 401。

83 值得在此提出讨论的另一个文化互补现象,是十进制小数(分数)和小数点概念的起源和传播。十进制小数在欧洲出现于文艺复兴期间,比十进制小数在阿拉伯文化的出现要迟。斯蒂文 1585 年的 *La Disme* 在当时的欧洲,被称为是第一部给十进制小数作出清晰明确解释的著作[见萨顿(Sarton) *Isis*, 1934 年, 21 期,以及 1935 年, 22 期]。十进制小数在中国的出现与中国的度量衡有关,早在秦始皇时代就有统一度量衡的实施。现存最早实物十进制小数记录是"九厘五毫",出现于王莽时代约在公元 1 ~5 年刘歆嘉的量斛

上。在“开不尽”无理数的应用上，刘徽给十进制小数的推算和理论作出下列解释[见《九章算术》刘徽注，约263年]：

> 加定法如前，求其微数。微数无名者，以为分子。其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细。

由此可见，最迟在3世纪，十进制小数在中国已获得正确的理解和应用。关于小数点概念的具体资料，现存最早的实例出现在1247年秦九韶《数书九章》中，秦九韶在十进制小数的“元数”下，用术语“收数”表示小数点，如果数据有单位，就以其单位代替“收数”。下表列出一些取自于《数书九章》的实例[出自UCSD中国研究170科目数学史讲义（1980年）]：

秦九韶在《数书九章》中表达小数点的实例

秦九韶符号	现在符号
O O O O O = ‖‖‖ ⊥ T 收数	0.00002366
— I ≡ ‖‖ ⊥ I ≣ ‖‖ 日	11.446154 日
I = O ≟ ‖‖‖ 度	120.95 度
O O O O ‖‖ — ‖‖ ≡ ‖ — ‖‖ 秒	0.0003133213 秒
— ‖‖‖ ≟ ‖ 寸	15.92 寸

表中收数和日、度、寸等单位，标在相应位置数字正下方，表示与小数点类似的功能。秦九韶表达小数点的方法与朱世杰（活动年代为1299年）相同，只是朱世杰用的术语是“小数”而不是“收数”。

小数点在阿拉伯文化最早的实例，出现于阿尔卡斯（al-Kāshī）1427 年的 al Risâli al-Mohītīje，他把圆周率表达如下：

sah – hah	
3　1415926535897932	3.1415926535897932

阿尔卡斯用"sah-hah"在圆周率的"元数"上表达小数点，与秦九韶的"收数"和朱世杰的"小数"的确十分类似，阿尔卡斯的"sah-hah"即"元数"或"整数"之意。在欧洲，小数点最早的实例，见鲁道夫（Rudolff）1530 年的 Exempel-Büchlin，他利用横线作为表明"元数"之位，明显也是建立在同一方法上。到斯蒂文（1548 ~ 1620）和朱载堉（1536 ~ 1611）时代，十进制小数和小数点概念在中国算学中已是普通知识。朱载堉等比律推算所用的数据，就是十进制小数，通常精确到 25 位。然而在 *La Disme* 中，为了说明小数之位值，斯蒂文建议用数字在小圈中把小数位一一顺序注明如下：

斯蒂文符号	现在符号
37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③	37.875

现今表示小数点的一点符号，虽然开普勒（Kepler）在 17 世纪已开始使用，但是直到 19 世纪才普遍采用。

84　见 *Harmonie Uniserselle*（1636 年，巴黎），第 3 册，第 12 节，"Des Genres de la Musique"。

85　见埃利斯（Ellis）1880 年论文 p.401 的讨论。

86　在欧洲均分最大音差的探索，最迟在 15 世纪就已开始。然而根据历史，用五度所生的律，最早解除最大音差的音律，实际上是《吕氏春秋》所载三分损益律。在第 5.1 节中已指出，三分损益二比律是声学界以均分音差来对换转调功能最早的一个重要"非等比"平均律。这也说明等比律不是解决均分最大音差的唯一解答。

87　西方音律学界公认，三大律制体系除纯律和等比律之外，还包括毕达哥拉斯律制，也有学者认为，应该包括中音调律（mean-tone tem-

perament)。中音调律利用平均二度得出比较接近纯律的大、小三度和大、小六度,但是极端地限制了中音调律的转调功能。然而,毕达哥拉斯律制的问题是最大音差。

88 三分损益律大半音 $\frac{2048}{2187}$ 和小半音 $\frac{243}{256}$ 的结合正是大全音 $\frac{8}{9}$,这是三分损益二比律的另一个主要结构,见程贞一(1987), pp. 179 ~ 180,以及本书第3.5.1节。

89 三分损益十二律音程的变化,见本书表3.5.1。

90 例外的是黄钟的四度、无射的大二度、仲吕的大二度和五度,见本书表3.5.1。

91 见 Karolyi, *Introducing Music* (Pelican, 1969), p. 131, 哈丁(Harding)《钢琴发展史》(*A History of the Pianoforte*, Cambridge, 1940),《哈佛简明音乐字典》(The Harvard Brief Dictionary of Music, New York, 1960) p. 93。

92 有关欧洲古典音乐中"和弦"与"和声"结构的分析和研究,见 Murphy and Stringham (1951)。

93 当然,等比律在欧洲得到运用和发挥,与欧洲键盘乐器的发展也有重要关系。



参考文献A

1800年之前的中文书籍与文献

班固. 汉书(又名《前汉书》). 公元92年后由班昭编纂
编者不明. 乐记(约公元前1世纪编入《礼记》). 约公元前5世纪
编者不明. 尚书(又名《书经》). 周
编者不明. 尚书纬. 公元前1世纪
编者不明. 诗经. 周
编者不明. 书经(又名《尚书》). 周
编者不明. 易经(又名《周易》). 周
编者不明. 月令(约公元前3世纪编入《吕氏春秋》. 约公元前1世纪编入《礼记》). 约公元前8世纪
编者不明. 周髀算经. 公元前3世纪. 收编《周公商高对话》. 西周; 《荣方陈子对话》. 公元前5世纪
编者不明. 周礼. 公元前2世纪
编者不明. 周易(又名《易经》). 周
程大位. 新编直指算法统宗. 明
戴圣编纂. 礼记. 约公元前50年
董仲舒. 春秋繁露. 公元前135年
穀梁赤. 穀梁传. 约公元前3世纪
淮南王刘安及其门生编. 淮南子. 约公元前120年
稷下门生编纂. 管子. 编于公元前4世纪或更早
孔子(由其弟子据语录编纂). 论语. 公元前5世纪
老子. 道德经. 约公元前4世纪或更早
吕不韦及其门人学者. 吕氏春秋. 公元前239年
孟轲. 孟子. 公元前3世纪

秦九韶. 数书九章. 1247 年
沈括. 梦溪笔谈. 1086 年
司马迁和其父司马谈. 史记. 约公元前 90 年
王充. 论衡. 约公元 82 年
许慎. 说文解字. 121 年
原编者不明. 九章算术.（张苍于公元前 165 年修编.）约公元前 3 世纪
原编者不明. 考工记(约公元前 2 世纪编入《周礼》). 约公元前 5 世纪
朱世杰. 四元玉鉴. 1303 年
朱载堉. 律吕精义. 1596 年
朱载堉. 律学新说. 1584 年
朱载堉. 圣寿万年历. 1595 年
庄周. 庄子. 约公元前 290 年
左丘明. 国语. 公元前 5 世纪
左丘明. 左传. 约公元前 5 世纪

参考文献B

1800年以来的中文和日文书籍与论文

安徽省文物工作队,阜阳地区博物馆,阜阳县文化局. 阜阳双古堆西汉汝阴侯墓发掘简报. 文物, 1978, (8): 12~31

程贞一(徐华焜译、王锦光校). 中国古代运动物理学的成就. 第四届中国科技史国际会议英文论文(澳大利亚悉尼大学,1986年5月16~21日),科学史译丛, 1988, 2(31): 1~5

程贞一(闻人军译). 从公元前五世纪青铜编钟看中国半音阶的生成. 载:曾侯乙编钟研究. 武汉: 湖北人民出版社, 1992. 342~370

程贞一. 有关中西科技交流史的一些见解. 第三次中国少数民族科技史会议论文,新疆乌鲁木齐, 1990年10月10~15日

程贞一. 曾侯乙编钟在声学史中的意义. 载:曾侯乙编钟研究. 武汉: 湖北人民出版社, 1992. 304~341

程贞一. 中国早期谐和音列系统的研究. 第三届中国科技史国际会议论文,北京, 1984

程贞一、席泽宗. 陈子模型和早期对太阳的测量. 载:中国古代科学史论. 山田庆儿和田中淡编, 京都: 京都大学出版社, 1991. 367~383

戴念祖. 朱载堉——明代的科学和艺术巨星. 北京: 人民出版社, 1986

方豪. 中西交通史. 长沙: 岳麓书社, 1987(台北:中华文化事业出版委员会,初版1953)

冯光生,谭维四. 曾侯乙编钟的发现与研究. 载:曾侯乙编钟研究(湖北省博物馆等编),武汉:湖北人民出版社,1992. 20~69

河姆渡遗址考古队. 浙江河姆渡遗址第二期发掘的主要收获. 文物, 1980,(5): 1~15

河南省文物研究所. 河南舞阳贾湖新石器时代遗址第二至六次发掘简

报. 文物, 1989,(1): 1～14, 47

湖北省博物馆(1). 随县曾侯乙墓钟磬铭文释文. 音乐研究, 1981,(1): 3～16

湖北省博物馆(2). 湖北江陵雨台山21号战国楚墓. 文物, 1988,(5): 35～38

湖北省博物馆(3). 曾侯乙墓. 卷I和卷II. 北京: 文物出版社, 1989

黄翔鹏. 均钟考——曾侯乙墓五弦器研究. 载:曾侯乙编钟研究. 武汉:湖北人民出版社, 1992. 548～586

黄翔鹏. 舞阳贾湖骨笛的测音研究. 文物, 1989,(1): 15～17

贾陇生,常滨久,王玉柱,林瑞,范皋淮,华觉明,满德发,孙惠清,张宏礼. 用激光全息技术研究曾侯乙编钟的振动模式. 江汉考古,1981,(1): 19～24

李纯一. 中国古代音乐史稿. 北京: 人民音乐出版社, 1981

李兆华. 中国数学史. 台北: 文津出版社, 1995

李仲达,华觉明,张宏礼. 商周青铜容器合金成分的考察. 西北大学学报(自然科学版), 1984,(2)

林瑞,王玉柱,华觉明,贾陇生,常滨久,满德发,张宏礼,孙惠清. 对曾侯乙墓编钟的结构探讨. 江汉考古, 1981,(1): 25～30

刘钝. 大哉言数. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1995

刘复. 十二等律的发明者朱载堉. 载:庆祝蔡元培先生六十五岁论文集. 国立中央研究院历史语言研究所集刊外编第一种, 上册,北平, 1933年. 279～310

缪天瑞. 律学. 北京: 人民音乐出版社, 1983

裘锡圭. 谈谈随县曾侯乙墓的文字资料. 文物, 1979,(7): 25～33

上海博物馆青铜器研究组. 曾侯乙编钟频率实测. 上海博物馆集刊(建馆三十周年特刊), 1982,上海:上海古籍出版社, 89～92

随县擂鼓墩一号墓考古发掘队. 湖北随县曾侯乙墓发掘简报. 文物, 1979,(7): 1～16

谭维四. 江陵雨台山21号楚墓律管浅论. 文物, 1988,(5): 39～42

王湘. 曾侯乙墓编钟音律的探讨. 音乐研究, 1981,(1): 68～78

闻人军.《考工记》成书年代新考. 文史(第23辑),北京:中华书局,

1984，31 ~ 39
杨荫浏．杨荫浏音乐论文选集．上海：上海音乐出版社，1986
杨荫浏．中国古代音乐史稿．北京：人民音乐出版社，1981
杨荫浏．中国音乐史纲．上海：万叶书店，1952
于省吾．关于古文字研究的若干问题．文物，1973，(2)：32 ~ 35

参考文献C

西文书籍与论文

Amiot, Jean Joseph-Marie. "Mémorie sur la Musique des Chinis tant anciens que modernes". (written in 1776) *Mémories concernant l' Histoire, les Sciences, les Arts, les Moeurs et les Usages, des Chinois, par les Missionnaires de Pékin, Paris*, 1776 ~ 1814. 1780, 6, 1.

Amiot, Jean Joseph-Marie. "Essay on the Sonorous Stone of China", in "Mémorie sur la Musique des Chinis tant anciens que modernes". *Mémories concernant l' Histoire, les Sciences, les Arts, les Moeurs et les Usages, des Chinois, par les Missionnaires de Pékin, Paris*, 1776 ~ 1814. 1780, 6, 1.

Apel, Willi. *The Harvard Dictionary of Music.* Boston: Harvard University Press, 1944.

Apel, Willi, and Daniel, Ralph T. *The Harvard Brief Dictionary of Music.* New York: Pocket Books, 1961.

Aristotle. *Metaphysics I*, 1.

Barbour, James M. *Equal Temperament: Its History from Ramis (1482) to Rameau (1737)*, Dissertation, Cornell University, 1932.

Bartholomew, Wilmer T. *Acoustics of Music.* New York: Prentice Hall, 1952.

Boethius. *De Institutione Musica*, see Friedlein (1867).

Bronowski, Jacob. *The Ascent of Man.* Boston: Little, Brown, and Co., 1973.

Chavannes. E. *Les Mémoires Historiques de Se-Ma Ts' ien* (vol. 3). Paris: Leroux, 1898.

Chen Cheng-Yih. *History of Mathematics in Chinese Civilization.* Chinese Studies 170 Lecture Notes. University of California at San Diego, 1980.

Chen Cheng-Yih. "Early Chinese Work on the Progression of Harmonic Intervals in Tonal System". Paper presented at the "3rd International Conference on the History of Chinese Science", Beijing: August 20 ~ 24, 1984.

Chen Cheng-Yih. "The Impact of Archaeology on the Chinese History of Science and Technology", a Public Lecture delivered at the Xia Nai Commemorative Symposium of the 4th International Conference of the History of Science in China held at the University of Sydney, New South Wales, Australia May 16 ~ 21, 1986.

Chen Cheng-Yih. "The Generation of Chromatic Scales in the Chinese Bronze Set-Bells of the -5th Century", in *Science and Technology in Chinese Civilization.* ed. by Cheng-Yih Chen. Singapore: World Scientific, 1987. 155 ~ 197.

Chen Cheng-Yih (ed.). *Science and Technology in Chinese Civilization.* Singapore: World Scientific, 1987.

Chen Cheng-Yih. "Bronze Dual-Tone Set-Bells and the Chromatic Scales". Paper presented at the "Fifth International Conference on the History of Science in China", held at the University of California, San Diego, August 5 ~ 10, 1988.

Chen Cheng-Yih (ed.). *Two-Tone Set-Bells of Marquis Yi*, Singapore: World Scientific, 1994.

Chen Cheng-Yih (ed.). "The Significances of Marquis Yi Bronze Set-Bells in the History of Acoustics". Paper presented at the "International Culture and Science Exchange Symposium: Marquis Yi Set-Bells" held at Wuhan, China, November 3 ~ 8, 1988; in ed. by Cheng-Yih Chen. *Two-Tone Set-Bells of Marquis Yi*, Singapore: World Scientific, 1994.

Chen Cheng-Yih. *Early Chinese Work in Natural Science*, Hong Kong: Hong Kong University Press, 1996.

Closson, Ernest (tr. D. Ames). *History of Piano*, London, 1947.

Courant, Mourice. "Essai historique sur la Musique classique des Chinois; avec un appendice relatif a la musique Coreenne" in *Encyclopedie de la Musique et Dictionnaire du Conservatoire*. Ed. Lavignac & Laurencie. Pt. 1, vol. 1. Paris, 1912.

Diels, Hermann. *Die Fragmente der Vorsokratiker*, ed. W. Kranz, 1st ed., 1903; 5th ed. Berlin: Wiedmann, 1934 ~ 1937.

Dijksterhuis, E. J. *Simon Stevin*. Gravenhage, 1943.

Duyvendak, J. J. L. "Simon Stevin's Sailing-Chariot and Its Chinese Antecedents", in *T'oung Pao. Archives concernant l'Histoire, les Langues, la Geographie, l'Ethnographie et les Arts de l'Asie Orientale, Leiden*. 36. 1942.

d'Elia, Pasquale M. ed. *Fonti Ricciane, Storia dell'Introduzione del Cristianesimo in Cina*, 1597 ~ 1611 vol. II. Rome, 1949.

Ellis, A. J. "On the History of Musical Pitch", in *Journal of the Royal Society of Arts*, vol. 294. 1880.

Ellis, A. "On the Musical Scales of Various Nations", in *Journal of Social Arts*, vol. 1885.

Euclid. *Elements*. -3rd century. The book is reconstructed from the thirteenth century translation of the Arabic translation (+8th century) of the *Elements*, from the +1501 Latin translation of Theons recension (fourth century) of the *Elements*, and from the tenth century Greek Manuscript discovered in 1808 in the Vatican Library. See T. L. Heath (1926).

Feng Guang-Sheng and Tan Wei-Si. "The Discovery and Research of the Marquis Yi Set-Bells of the Zeng State", in: *Two-Tone Set-Bells of Marquis Yi*, ed. by Chen Cheng-Yih. Singapore: World Scientific, 1994. 1 ~ 71.

Fokker, A. D. *Rekenkundige Bespiegeling der Muziek*. Gorinchem, 1945.

Freeman, Kathleen. *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers*. Oxford: Blackwell, 1948 also Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948.

Friedlein, G. (ed.) Boethius. *De Institutione Musica*. Leipzig: B. G. Teubner, 1867. trans. I. E. Drabkin.

de Haan. Bierens. "*Van de Spiegeling der Singkonst*" *et* "*Van de Molens*"; *deux Travités inédits*. Amsterdam, 1884.

Harding, R. E. M. *A History of the Pianoforte*. Cambridge, 1940.

Haydon, Glen. *Introduction to Musicology*. New York: Prentice-Hall, 1950.

Heath, Thomas L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 3 vols. London: Oxford University Press, 1908.

Iamblichus. *Introductio Nicomachi Arithmetic* (Tennulius' ed).

Károlyi, Ottó. *Introducing Music*. Pelican, 1969.

Kranz, W. (ed.) *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 5th edition. Berlin: Wiedmann, 1934 ~ 1937; Hermann Diels (ed.) 1st edition. 1903.

Mahillon, Victor Charles. *In Annuaire du Conservatoire Royal de Musique de Bruxelles*. 1890. 188.

McClain, Ernest G. "The Bronze Chime Bells of the Marquis of Zeng: Babylonian Biophysics in Ancient China". *J. Social. Biol. Struct*. 8. 1985. 147 ~ 173.

Mersenne, Marin. *Harmonie Uniserselle*. Paris, 1636.

Murphy, Howard A., and Stringham, Edwin J. *Creative Harmony and Musicianship: An Introduction to the Structure of Music*. New York: Prentice Hall, 1951.

Needham Joseph. *Science and Civilisation in China*. vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1954.

Needham Joseph. *Science and Civilisation in China*. vol. 4. Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

Nicomachus of Gerasa. *Encheiridion Harmonices* (2nd century), see Marcus Meibom.

Philolaus. frag. 6; translation by Freeman, see *Die Fragmente der Vorsokratiker* by Hermann Diels, 1st ed., 1903; 5th ed., ed. W. Kranz. Berlin: Wiedmann, 1934 ~ 1937; For a complete translation of these fragments, see Kathleen Freeman, *Ancilla to the Pre-Socratic Philosopers*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948. p. 74.

Plutarch. *Moralia*. "Creation of Soul". translated by John Phillips. 1694.

Sarton, George. *Introduction to the History of Science*. Baltimore, 1947.

Sarton, George. "Simon Stevin of Bruges; the first explanation of Decimal Fractions and Measures. 1585; together with a history of decimal idea, and a facsimile of Stevin's Disme", *Isis* 21. 1934; 23. 1935.

Scholes. P. A. (ed.) *The Oxford Companion to Music*. Oxford, 7th Edition. 1947; 8th Edition. 1950.

Schaeffner, A. *Origine des Instruments de Musique*. Paris: Payot, 1936.

Stevin, Simon. *La Disme*. 1585.

Verturi, P. T. (ed.) *Opere Storche del p. Matteo Ricci*. 2 vols. Giorgetti, Macerata, 1911.

Winnington-Ingram, R. P. *Mode in Ancient Greek Music*. Amsterdam: Adolf M. Hakkert, 1968.